Valószínűségszámítás

2020. november ~~11.~~ 18.

Mészáros Szabolcs

Tárgyhonlap:
cs.bme.hu/valszam

Tételek eloszlásokról

Témák:

- Eloszlásokra vonatkozó egyenlőtlenségek:
  - Markov
  - Csebisev
  - (Csernov)
- Nagy számok törvénye
  - Gyenge
  - Erős
- Centrális határeloszlás tétel

Markov-egyenlőtlenség, áll.

Állítás: Legyen X nemnegatív értékű val. változó.
Ekkor minden $a > 0$ esetén

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

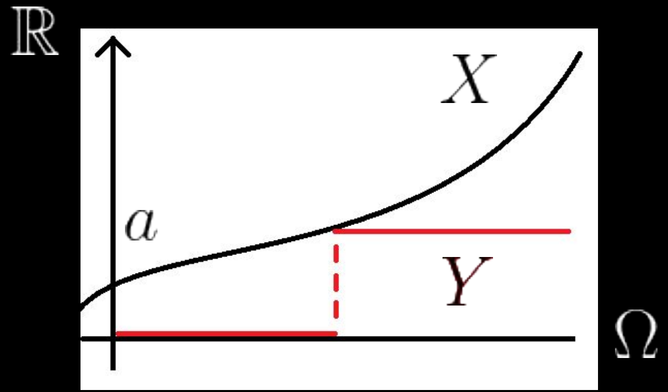
Hátulütők:

- Lényeges feltétel a nemnegativitás. (Ellenpélda: konstans -1)
- Önmagában használva ez általában nem egy erős becslés, de felhasználható más becslésekhez.

Markov-egyenlőtlenség, biz.

Bizonyítás: Legyen

$$Y = \begin{cases} a & \text{ha } X \geq a \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



Mivel $X \geq 0$ ezért $X \geq Y$

$$\implies \mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y) =$$

$$= 0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + a \cdot \mathbb{P}(Y = a) = a \cdot \mathbb{P}(X \geq a)$$

Csebisev-egyenlőtlenség, áll.

Állítás: Legyen X valószínűségi változó, amire $\mathbb{D}^2(X)$ véges. Ekkor minden $a > 0$ esetén

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{D}^2(X)}{a^2}$$

Megjegyzések:

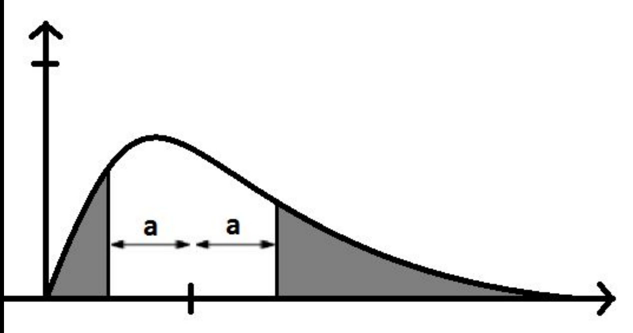
- Ehhez nem kell feltegyük, hogy a val. változó nemnegatív.
- Tipikusan erősebb, mint a Markov.
- Jelentés: az átlagtól való egyre nagyobb eltérés valószínűsége legalább négyzetes ütemben csökken.
- Alátámasztja, hogy a szórás(négyzet) az átlagtól való eltérést “méri”.

Csebisev-egyenlőtlenség, biz.

Bizonyítás: Legyen $Y = \left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2$

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a\right) = \mathbb{P}(Y \geq a^2) \overset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(Y)}{a^2} = \frac{\mathbb{D}^2(X)}{a^2}$$

$\mathbb{R}$



$\mathbb{E}(X)$

Megjegyzés: Csak akkor érdekes, ha $a > \mathbb{D}(X)$

Csebisev-egyenlőtlenség, példa

Példa: Egy adott adatbázis szerver átlagosan 50 lekérést fogad egy időegység alatt. A lekérések számának szórása a tapasztalatok szerint 5. Adjunk alsó becslést annak a valószínűségére, hogy 40-nél több, de 60-nál kevesebb lesz a lekérések száma egy időegység alatt.

X: a lekérések száma (időegység alatt)

$$\mathbb{P}(40 < X < 60) = \mathbb{P}(|X - 50| < 10) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(|X - 50| \geq 10) \geq 1 - \frac{\mathbb{D}^2(X)}{a^2} = 1 - \frac{5^2}{10^2} = \frac{3}{4}$$

Csebisev

Paraméteres Csernov-egyenlőtlenség

Állítás: Legyen X valószínűségi változó.
Ekkor minden $a, t > 0$ esetén

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{ta}}$$

Megjegyzés:

- paraméteres egyenlőtlenség
- biz: szintén a Markov-egyenl. segítségével

Példa: Legyen $X \sim \mathrm{Pois}(5)$.
Adjunk felső becslést $\mathbb{P}(X \geq 10)$-re.

$$\mathbb{P}(X \geq 10) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{10t}} = e^{-10t} \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{5^k}{k!} e^{-5} = e^{-10t + 5e^t - 5}$$

$$\mathbb{P}(X \geq 10) \leq e^{-10\ln(2) + 5\cdot 2 - 5} \approx 0{,}1449$$

Markov: 0.5
Csebisev: 0.2

Nagy számok törvénye

A nagy számok törvénye egy matematikai állítás, nem egy népi bölcsesség.

Ami nem (teljesen) a nagy számok törvénye:

- “A fejek és írások száma kiegyenlítődik.” (Ez így nagyon nem pontos)
- “Ami megtörténhet az előbb-utóbb meg is történik.”
  (Ez következmény, ha kicsit pontosabban fogalmazzuk meg)
- “Független, azonos eloszlású kísérletek átlaga a várható értékhez tart.”
  (Mi az hogy “tart”? Val. változók sorozata tud “tartani” valamihez határértékben? Eddig mindig csak valószínűségek tartottak valahova.)

Nagy számok törvénye, spec. eset

Legyenek $A_1, A_2, \ldots$ együttesen független, p valószínűségű események. Mihez tart a $\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ mennyiség, ha $n \to \infty$?

Intuitíven, ha $p > 0$ és n nagy, akkor szinte biztos, hogy valamelyik esemény bekövetkezik, tehát a fenti valószínűség 1-hez tart.

Sőt, intuitíven az is világos, hogy n eseményből nagyjából $n \cdot p$ fog bekövetkezni, hiszen a valószínűség a relatív gyakoriság.

A nagy számok törvénye ezeket (is) fogja mondani.

- De mi az a fenti sorban, hogy “nagyjából”?
- Minden kimenetelre igaz ez, vagy csak a “legtöbb”-re?

Nagy számok törvénye, áll.

Tétel: Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású val. változók egy végtelen sorozata. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ és $\mathbb{D}(X_n) = \sigma$ minden n-re.

Jelölés: $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$

- Nagy számok gyenge törvénye (Bernoulli-féle): $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

- Nagy számok erős törvénye (Kolmogorov-féle):

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X_n} = \mu\right) = 1$$

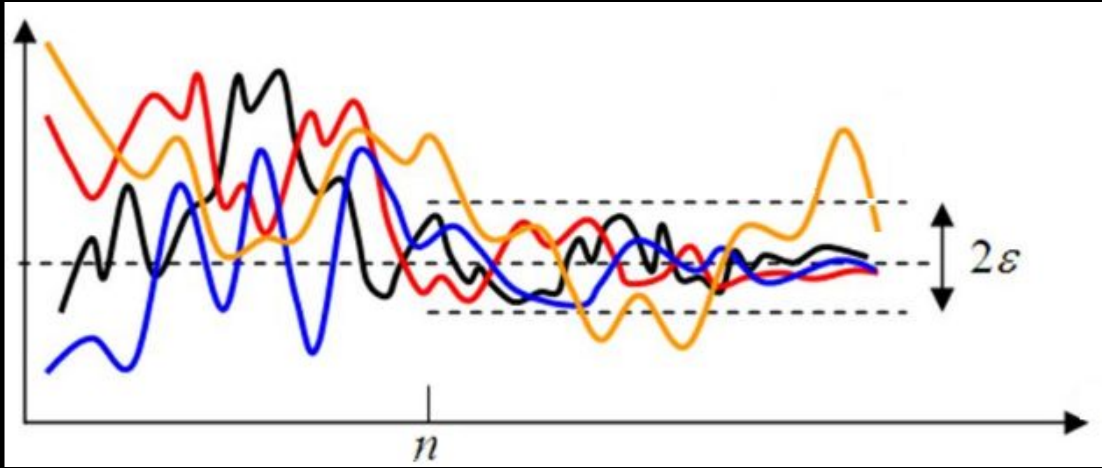
Nagy számok törvénye, gyenge vs erős

gyenge:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

erős:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X_n} = \mu\right) = 1$$



Kérdés: Az “erős” tétel mitől “erősebb”, mint a gyenge?

Ha a val. változók nem azonos eloszlásúak, és $\frac{1}{n^2}\mathbb{D}^2(X_n)$ nullához tart, de nem szummábilis, akkor az erős tétel nem teljesül (de a gyenge igen).

Nagy számok törvénye, spec. eset

Spec eset levezetése:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} > 0\right)$$

A tétel miatt az $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}$ -re:

- Annak a valószínűsége, hogy p-től $\overline{X_n}$ kicsivel is eltér, nullához tart.
- Egy valószínűséggel olyan kimenetelen vagyunk, ahol az $n \mapsto \overline{X_n}(\omega)$ számsorozat p-hez tart.

Nagy számok törvénye, biz.

Gyenge törvény biz: $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = \dfrac{\mu + \ldots + \mu}{n} = \mu$

$$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - \mu| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}\Big(|\overline{X_n} - \mathbb{E}(\overline{X_n})| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{\mathbb{D}^2(\overline{X_n})}{\varepsilon^2}$$

$$\mathbb{D}^2(\overline{X_n}) = \mathbb{D}^2\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\Big(\mathbb{D}^2(X_1) + \cdots + \mathbb{D}^2(X_n)\Big) = \frac{n}{n^2}\sigma^2 \to 0$$

Eloszlásbeli konvergencia

Kérdés: milyen gyorsan válik igazzá a nagy számok törvénye?
Másképp kérdezve, ha n helyett kisebb a nevező, akkor mit lehet mondani?

Definíció: Legyen $X_1, X_2, \ldots$ val. változók
egy végtelen sorozata; az eloszlásfüggvényeik: F_{X_n}

A fenti sorozat *eloszlásban konvergál* egy Z val. változóhoz (elo. fv: F_Z),
ha $n \to \infty$ esetén

$$F_{X_n}(x) \to F_Z(x)$$

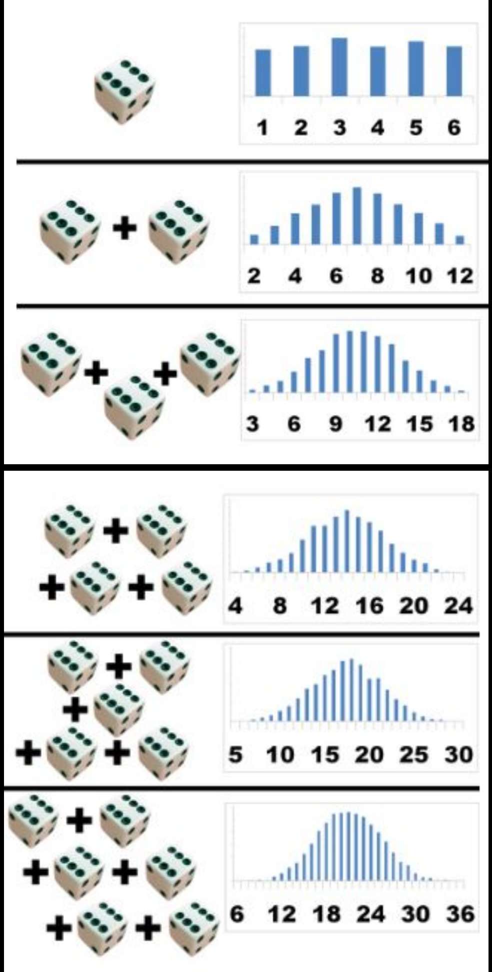
minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol F_Z az x-ben folytonos.

Centrális határeloszlás-tétel (CHT)

Tétel: Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású val. változók egy végtelen sorozata. Tegyük fel, hogy szórásnégyzetük véges, és legyen $Z \sim N(0; 1)$. Ekkor

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n} \cdot \mathbb{D}(X_1)} \xrightarrow{d} Z$$

minden $a \in \mathbb{R}$ esetén, ha $n \to \infty$.



Centrális határeloszlás-tétel

Kérdés: Hogy lehet ezt felírni valószínűségek konvergenciájaként?

$$\mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}\cdot\mathbb{D}(X_1)}}_{\displaystyle\frac{\overline{X_n} - \mathbb{E}(\overline{X_n})}{\mathbb{D}(\overline{X_n})}} < a\right) \begin{array}{l} \to \Phi(a) \\ n \to \infty \end{array}$$

mivel $\mathbb{D}^2(\overline{X_n}) = \frac{n}{n^2}\mathbb{D}^2(X_1)$

CHT => de Moivre-Laplace tétel

Centrális határeloszlás-tétel, példa

Példa: Egy pincészetben munkanapokon átlagosan 100 liter bort mérnek ki, 20 liter szórással. Tegyük fel, hogy az egyes napok mérései függetlenek és azonos eloszlásúak. Az évből hátralévő 50 munkanap alatt 4750 liter bort kellene eladniuk ahhoz, hogy felülmúlják a tavalyi teljesítményt. Mi a valószínűsége, hogy ez sikerül?

Egyes napok eredményei: $X_1, X_2, \ldots, X_{50}$

$$\mathbb{E}(X_1) = 100 \quad \mathbb{D}(X_1) = 20$$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{50} X_i \geq 4750\right) = ?$$

Tudjuk (CHT):

$$\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 50 \cdot 100}{\sqrt{50} \cdot 20}$$ közelítőleg $N(0;1)$

Centrális határeloszlás-tétel, példa

(folyt.)

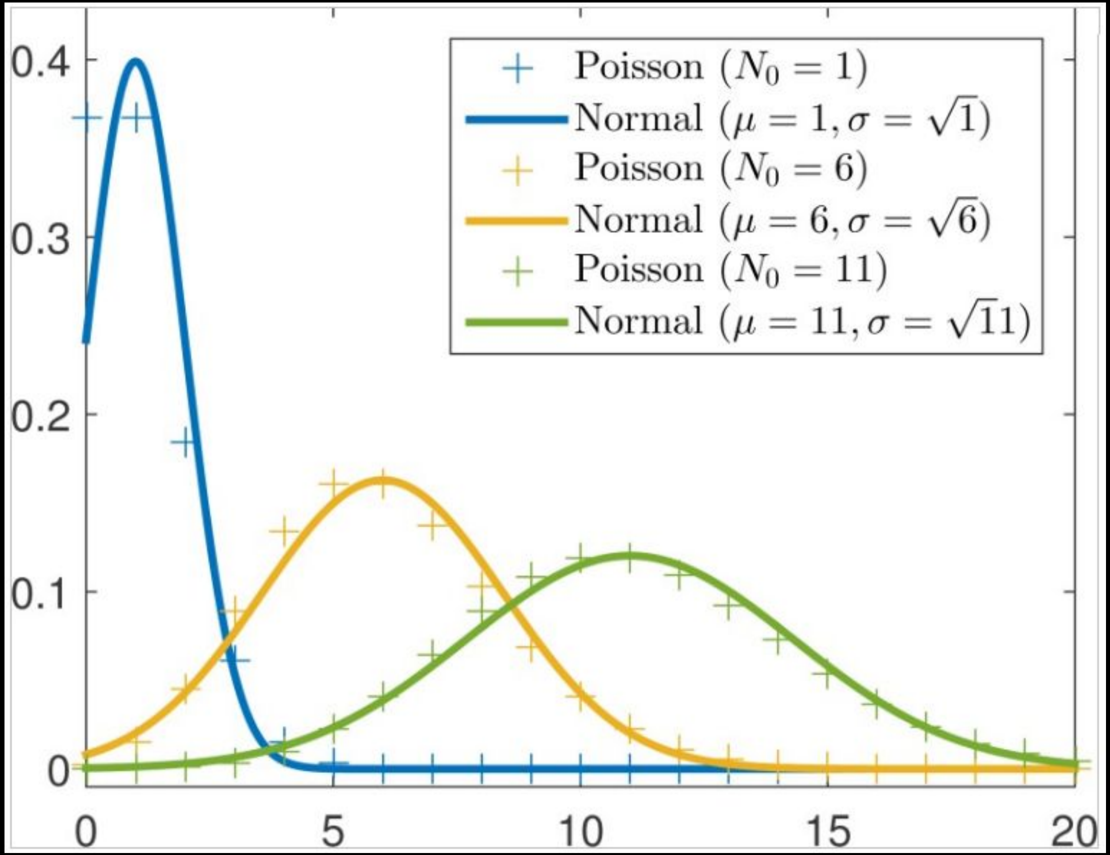
$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{50} X_i \geq 4750\right) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 50 \cdot 100}{\sqrt{50} \cdot 20} < \frac{4750 - 5000}{\sqrt{50} \cdot 20}\right)$$

CHT

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{4750 - 5000}{\sqrt{50} \cdot 20}\right) = 1 - \Phi(-1{,}7678) \approx 0{,}9615$$

Normális vs Poisson



Kitérő: konvergenciák

Konvergencia-típusok (amit említettünk):

1. egy valószínűségű konvergencia $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \ldots) = 1$
2. sztochasztikus konvergencia $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\ldots \geq \varepsilon) = 0$
3. eloszlásbeli konvergencia $F_{X_n}(x) \to F_Z(x)$

Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(X_i) = 0$ és $\mathbb{D}(X_i) = 1$

NSZT: $\overline{X}_n \to 0$ (1. és 2. értelemben)

CHT: $\sqrt{n} \cdot \overline{X}_n \to N(0;1)$ (3. értelemben)

Momentumgeneráló függvény, def.

Definíció: Az X val. változó momentumgeneráló függvénye

$$M_X(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(e^{tX})$$

azon t helyeken értelmezve, ahol a jobb oldal véges.

Példa: Korábbi számolások alapján,

- $\mathrm{Pois}(\lambda)$ eloszlásra: $e^{\lambda e^t - \lambda}$
- $\mathrm{Exp}(\lambda)$ eloszlásra: $\dfrac{\lambda}{\lambda - t}$ $\quad (t < \lambda)$

Momentumgeneráló függvény, tul.

Állítás: Legyenek Y, Z illetve $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $M_Z(t)$ és $M_Y(t)$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén értelmezett.

Ekkor

1. Ha $M_Y(t) = M_Z(t)$ minden t-re, akkor Y és Z azonos eloszlásúak.
2. Ha $\lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M_Z(t)$ minden t-re, akkor $X_n \xrightarrow{d} Z$

Centrális határeloszlás-tétel

Biz. vázlat:

1. Elég azt az esetet bebizonyítani, amikor $\mathbb{E}(X_1) = 0$ és $\mathbb{D}(X_1) = 1$

   Ekkor azt kell megmutatnunk, hogy $$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{d} Z \sim N(0;1)$$

2. Ötlet: használjuk a momentumgeneráló függvényt. Az állítás miatt azt kell belátnunk, hogy $$\lim_{n\to\infty} M_{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}}}(t) = M_Z(t)$$

Centrális határeloszlás-tétel

Biz. vázlat (folyt.):

3. $$M_Z(t) = \mathbb{E}(e^{tZ}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z = e^{\frac{t^2}{2}}$$

4. $$M_{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}}}(t) = \mathbb{E}\left(e^{t\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}}}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}X_i}\right) = M_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}X_1}\right)^n = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^k X_1^k\right)^n = \left(1 + \frac{t^2}{2n}(1 + r_n(t))\right)^n$$

Köszönöm a figyelmet!