Valószínűségszámítás

2020. október 14.

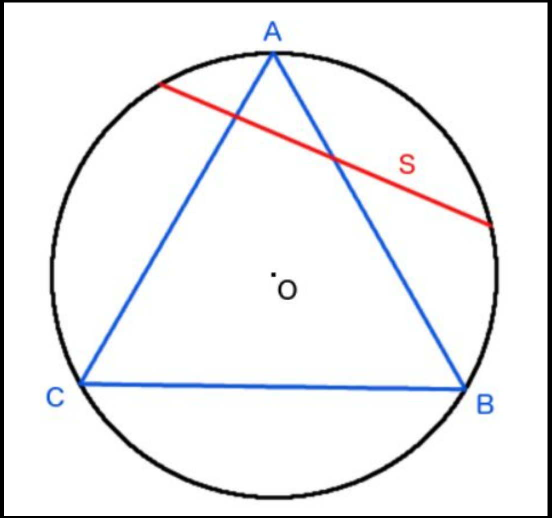
Mészáros Szabolcs

Tárgyhonlap:
cs.bme.hu/valszam

A prezentáció anyagát és az abból készült videofelvételt a tárgy hallgatói jogosultak használni, kizárólag saját célra. A felvétel másolása, videómegosztókra való feltöltése részben vagy egészben tilos, illetve csak a tantárgyfelelős előzetes engedélyével történhet.

Bertrand-paradoxon

Feladvány: Válasszuk ki egy kör egy húrját véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy a húr hosszabb, mint a körbe írható szabályos háromszög egy oldala?



a) $\dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{1}{4}$

d) egyik sem

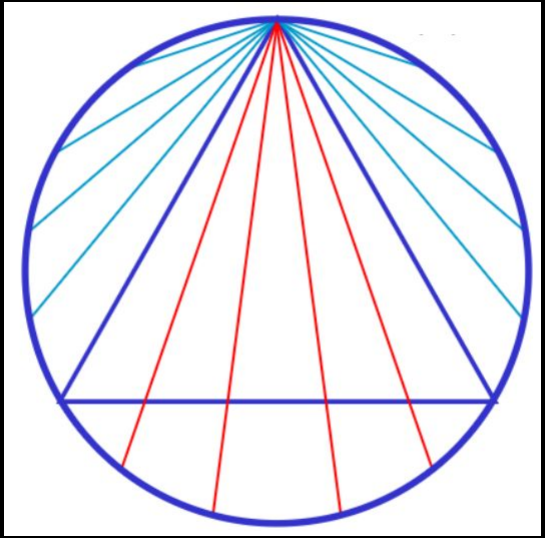
Bertrand-paradoxon, v1

Egyenletesen véletlenszerűen választunk:

1. a körvonalon P pontot, aztán
2. a körvonalon Q pontot.

Vegyük a PQ húrt.

Válasz: $\frac{1}{3}$



Magyarázat: rajzoljuk be a P csúcsú szabályos háromszöget. Kedvező eset: ha Q a háromszög másik két csúcsa közti körívre esik.

Bertrand-paradoxon, v2

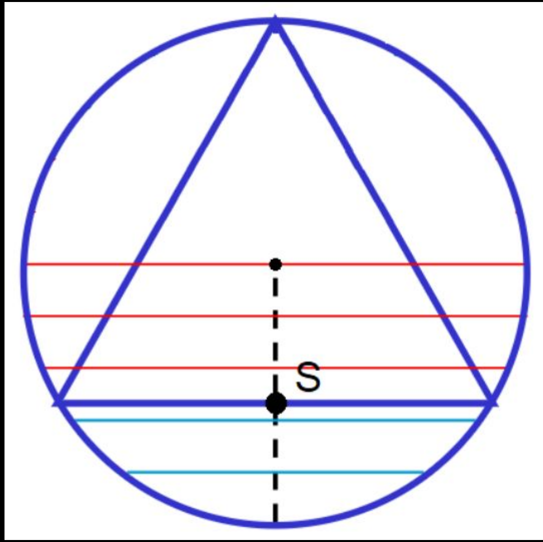
Egyenletesen véletlenszerűen választunk:

1. a körvonalon P pontot, aztán
2. a PO sugáron S pontot.

Vegyük a PO-ra vett merőleges húrt S-ben.

Válasz: $\frac{1}{2}$

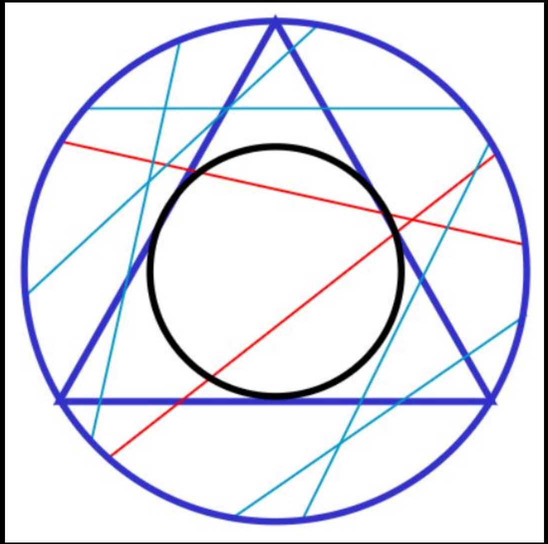
Magyarázat: rajzoljuk be a P-vel átellenes csúcsú szabályos háromszöget. Kedvező eset: ha S a háromszögön belül van.



Bertrand-paradoxon, v3

Egyenletesen véletlenszerűen választunk:

1. a kör**lapon** P pontot.



Vegyük azt a húrt, aminek felezőpontja P.

Válasz: $\frac{1}{4}$

Magyarázat: rajzoljunk be egy tetszőleges szabályos háromszöget, és beírható körét. A kis kör sugara fele a nagy kör sugarának.

Kedvező eset: ha P a körön belül van.

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi \Big/ r^2\pi = \frac{1}{4}$$

Bertrand-paradoxon, sűrűségfüggvény

Kérdés: Mi a húr hosszának sűrűségfüggvénye, mondjuk az 1. módszernél?

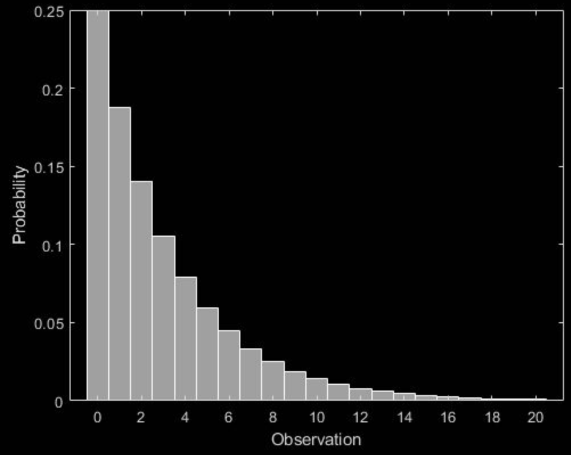
$$F_X(x) = \mathbb{P}(\text{húr} < x) = \frac{2 \cdot |\{\alpha \in [0, \pi] \mid \alpha \text{ kp.-i szögű húr} < x\}|}{2\pi}$$

Számláló (koszinusz-tétellel):

$$\sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot \cos(\alpha)} < x \iff \alpha < \arccos\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi}\arccos\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow f_X(x) = F'_X(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Geometriai eloszlás



Példák:

- Cérnát próbálunk befűzni, hányadszorra sikerül.
- Addig jár a korsó a kútra…
- Független kísérletek, első siker sorszáma.

Definíció: Az X val. változó *geometriai eloszlású* p paraméterrel (ahol $0 < p < 1$), ha

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p \qquad (\forall k = 1, 2, \dots)$$

Jelölés: $X \sim \mathrm{Geo}(p)$

Geometriai eloszlás, várható érték

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} p =$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} (1-p)^{k-1} = p \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} (1-p)^{k-1}$$

$$= p \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1-p)^{i-1}}{1-(1-p)} = \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^{j} = \frac{1}{p}$$

Exponenciális eloszlás

Definíció: Egy Z val. változó *exponenciális eloszlású* λ paraméterrel (ahol $\lambda > 0$ valós), ha

$$f_Z(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Jelölés:

$$Z \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

Példák:

- Idei első áramszünet időpontja,
- Mikor hív már fel XY?
- Sűrű, egymás utáni “kísérletek” közül az első siker időpontja.

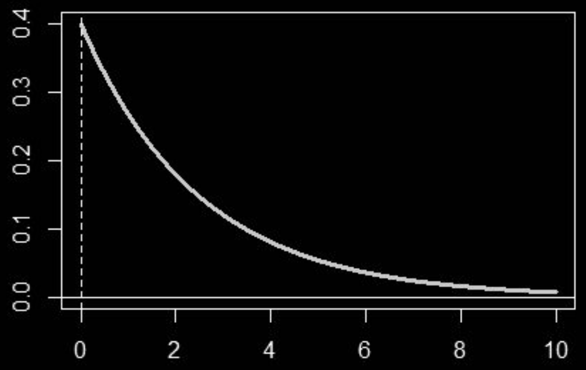
Exponenciális eloszlás

Ez valóban sűrűségfüggvény, hiszen

- nemnegatív
- integrálja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x =$$

$$\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = 0 + e^{-0} = 1$$



Exponenciális eloszlás, várható érték

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x =$$

$$= \left[x(-e^{-\lambda x})\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-\lambda x})\mathrm{d}x$$

$$= 0 + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = 0 - \frac{1}{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Exponenciális eloszlás, példa

Feladat. (2019-es pótZH, 4.) Felfogadtunk egy kivitelezőt egy felújításhoz, aki a munkát csak később, $\mathrm{Exp}(\lambda)$ eloszlású idő múlva tudja elkezdeni. Maga a munka legalább 4, legfeljebb λ időegységig tart ($\lambda \geq 4$), de nem tudjuk pontosan meddig: a fenti két határ között bármilyen időtartam előfordulhat, egyenletes eloszlással. Mennyi λ értéke, ha várhatóan 10 időegység alatt készülünk el, a kezdeti várakozást is beleszámolva?

Kezdésig eltelt idő: $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ Munka ideje: $Y \sim U(4; \lambda)$

$$10 = \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda} + \frac{4+\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{248}}{2}$$ de $\lambda \geq 4$ ezért $\lambda \approx 15{,}87$

Örökifjúság

Definíció: Nevezzünk egy X val. változót *örökifjú*nak a $G \subseteq \mathbb{R}$ halmazon, ha tetszőleges $s, t \in G$ esetén

$$\mathbb{P}(X > t + s \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

illetve $\mathbb{P}(X \in G) = 1.$

Tipikus kérdések:

- Tessék? “Akár várok már s ideje, akár most kezdtem várni, annak a valószínűsége, hogy még több, mint t ideig kell várnom, ugyanaz.”
- Van-e ilyen valószínűségi változó? Az G-től függ.

Örökifjúság, biz.

Állítás: Legyen X nem-konstans örökifjú val. változó a G halmazon.

1. Ha $G = \{1, 2, 3, \dots\}$, akkor X eloszlása geometriai.
2. Ha $G = [0, \infty)$, akkor X eloszlása exponenciális.

Bizonyítás: Az örökifjúság feltétele ekvivalensen,

$$\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s) \qquad (\forall s, t \in G)$$

Örökifjúság, biz. 1

1. eset: $G = \{1, 2, 3, \dots\}$

Rögzítsünk egy t pozitív egészt, és jelölje $p = \mathbb{P}(X = 1)$

$$\mathbb{P}(X > t + 1) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > 1) =$$

$$= \mathbb{P}(X > t) \cdot (1 - p) = \dots = (1 - p)^{t+1}$$

Ebből már kiszámolhatjuk az eloszlást:

$$\mathbb{P}(X = t) = \mathbb{P}(X > t - 1) - \mathbb{P}(X > t) =$$

$$= (1 - p)^{t-1} - (1 - p)^{t} = p(1 - p)^{t-1}$$

Örökifjúság, biz. 2

2. eset: $G = [0, \infty)$

Jelölés: $g(t) = \ln \mathbb{P}(X > t)$ minden pozitív valós t-re.

Tetszőleges $s, t \in [0, \infty)$ esetén

$$g(t+s) = \ln \mathbb{P}(X > t+s) =$$

$$= \ln \mathbb{P}(X > t) + \ln \mathbb{P}(X > s) = g(t) + g(s)$$

Ebből és g definíciójából kihozható, hogy valamilyen pozitív λ értékre

$$g(t) = -\lambda t \quad (\forall t > 0) \quad \Rightarrow \quad P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

Exponenciális egész része

Állítás: Legyen $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Ekkor $\lceil X \rceil \sim \mathrm{Geo}(1 - e^{-\lambda})$.

Bizonyítás: Legyen $k > 0$ egész.

$$\mathbb{P}\big(\lceil X \rceil = k\big) = \mathbb{P}(k - 1 < X \leq k) =$$

$$= F_X(k) - F_X(k-1) = (1 - e^{-\lambda k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)})$$

$$= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda}) = (1-p)^{k-1}p$$

Poisson-eloszlás, definíció

Definíció: Az X val. változó *Poisson-eloszlás*ú λ paraméterrel (ahol $\lambda > 0$), ha

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (\forall k = 0, 1, 2, \dots)$$

Jelölés: $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$

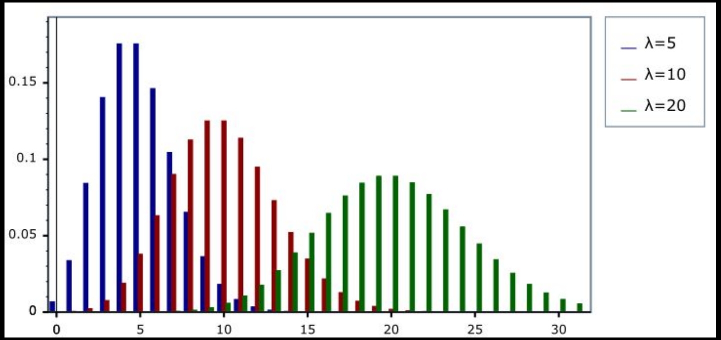
Példák:

- Adott órában születő gyerekek száma.
- Szerverre beérkező request-ek száma adott időintervallumban.
- Általában: rengeteg kis valószínűségű, egymástól független eseményből hány következik be.

Poisson-eloszlás, várható érték

Ez tényleg eloszlás:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$
$$= e^{\lambda - \lambda} = 1$$



Várható értéke:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda$$

Poisson-eloszlás, példa

Feladat: Egy kaszkadőr egy évben átlagosan kétszer sérül meg. Mi a valószínűsége, hogy idén éppen négyszer?

Sérülések száma: Y

Kérdés: $\mathbb{P}(Y = 4) = ?$

Feltesszük, hogy $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$

Tudjuk, hogy $2 = \mathbb{E}(Y) = \lambda$

$$\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{2^4}{4!}e^{-2} = \frac{2}{3}e^{-2} \approx 0{,}0902$$

Poisson-approximáció

Állítás: Legyen n pozitív egész, $\lambda \in (0, \infty)$, és jelölje $p_n = \dfrac{\lambda}{n}$-et.
Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (\forall k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Megjegyzések:

- Ha $X \sim B\left(n; \dfrac{\lambda}{n}\right)$ ahol n “nagy”, de λ nem, akkor X kb. Poisson.
- Határeloszlás-tétel: egy eloszlásokból álló sorozat “határértékének” leírása.

Poisson-approximáció

Bizonyítás: legyen k és n rögzített.

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!n^k}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\downarrow \atop e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\downarrow \atop 1}$$

$$n \to \infty$$

Poisson-eloszlás, példa

Példa: Tegyük fel, hogy egy magyarérettségiben kétszer akkora eséllyel van összesen 3 elírás, mint 1 elírás. Tegyük fel, hogy a hibák egymástól függetlenül, azonos eséllyel következnek be. Közelítőleg mekkora a valószínűsége, hogy egyáltalán nincs elírás a dolgozatban?

Hibák száma: X Kérdés: $\mathbb{P}(X = 0) = ?$

Közelítőleg: $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$

$$2 = \frac{\mathbb{P}(X = 3)}{\mathbb{P}(X = 1)} = \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} \Big/ \frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{6} \Rightarrow \lambda = 2\sqrt{3}$$

$$\cdots \Rightarrow \mathbb{P}(X = 0) = e^{-2\sqrt{3}}$$

Köszönöm a figyelmet!