Pótló zárthelyi dolgozat

Pontozási útmutató

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Artimetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Tekintsük a síkon azt a téglalapot, aminek csúcsai az $(1;1)$, $(-1;1)$, $(-1;0)$ és $(1;0)$ pontok, és rajzoljunk bele egy háromszöget, melynek csúcsai $(1;0)$, $(-u;0)$ és $(0;v)$, valamilyen $0<u,v\le 1$ számokra. Válasszunk egyenletesen véletlenszerűen egy pontot a téglalapban. Jelölje A azt az eseményt, hogy a pont első koordinátája pozitív, és B azt az eseményt, hogy a pont a fenti háromszögbe esik. Tudjuk, hogy A és B függetlenek.

   (a) Határozzuk meg u értékét.

   (b) Legyen u az (a) feladatrészben meghatározott érték, és $v=0{,}5$. Legfeljebb mekkora lehet egy olyan esemény valószínűsége, ami mind az A, mind a B eseményeket kizárja?

   (1 pont) Geometriai valószínűség: $T_{kedvező}/T_{összes}$ (Ha ez implicit használva van a lenti valószínűségek kiszámolásához, akkor is jár a pont.)
   (2 pont) Függetlenek $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cap B)$
   (2 pont) Összes terület: 2, ezért $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$
   (2+1 pont) $\mathbb{P}(B)=\frac{(1+u)\cdot v}{2}/2$ valamint $\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{1\cdot v}{2}/2$ (Ha csak az egyik helyes, akkor 2 pont.)
   (1 pont) A függetlenség definíciójába behelyettesítve: $\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+u)\cdot v}{4}=\frac{v}{4}$
   (1 pont) v-vel leegyszerűsítve: $\frac{1+u}{8}=\frac{1}{4}$, tehát $u=\underline{\underline{1}}$.
   (2 pont) Legyen C egy olyan esemény, ami kizárja A-t és B-t, azaz $C\cap A=\emptyset$ és $C\cap B=\emptyset$. (A pont arra jár, hogy a kizáróság definíciója ki van bontva.)
   (2 pont) Egy ilyen C eseményre teljesül, hogy $C\subseteq\overline{A\cup B}$.
   (2 pont) Ha C-nek a lehető legnagyobb a valószínűsége, akkor $\mathbb{P}(C)=\mathbb{P}(\overline{A\cup B})$
   (3 pont) $\mathbb{P}(\overline{A\cup B})=1-\mathbb{P}(A\cup B)=1-\big(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\big)$ (Indoklásként vagy a Poincaré-formulára, vagy egy Venn-diagramra lehet hivatkozni.)
   (1 pont) $=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\underline{\underline{\frac{3}{8}}}$

2. Főhősünk, Újvárosi Izsák szeret a kedvenc almafája alatt üldögélni. Tegyük fel, hogy minden nap ugyanolyan p eséllyel esik Izsák fejére alma (ahol $0 < p < 1$), az egyes napokon egymástól függetlenül. (Adott napon vagy esik a fejére alma, vagy nem; az nem számít, hogy egy nap hányszor.) Izsák kiszámolta, hogy ugyanannyi annak a valószínűsége, hogy a tizedik vizsgált napon esik a fejére először alma, mint annak a valószínűsége, hogy a 10 napból pontosan két olyan nap lesz, amikor esik a fejére alma. Átlagosan hányadik napon esik először a fejére alma (nem feltétlenül az első 10 napban)?

   (2 pont) X: hányadik napon esik a fejére először alma, Y: 10 napból hány napon esik a fejére alma
   (1 pont) $\mathbb{P}(X = 10) = \mathbb{P}(Y = 2)$
   (1 pont) $\mathbb{E}(X) =?$
   (3 pont) $X \sim \mathrm{Geo}(p)$, hiszen független kísérletek esetében várunk az első sikerre,
   (3 pont) $Y \sim B(10; p)$, hiszen 10 db független kísérlet közül számoljuk a sikereseket,
   (2 pont) $\mathbb{P}(X = 10) = (1 - p)^9 p$
   (2 pont) $\mathbb{P}(Y = 2) = \binom{10}{2} p^2 (1 - p)^8$
   (2 pont) Tehát $(1 - p)^9 p = \mathbb{P}(X = 10) = \mathbb{P}(Y = 2) = \binom{10}{2} p^2 (1 - p)^8$
   (1 pont) Mivel $0 < p < 1$ így leegyszerűsítve: $1 - p = 45p$, ezért $p = \frac{1}{46}$ (Ha nincs hivatkozás a feltételre, akkor is jár a pont.)
   (2 pont) Mivel X geometriai eloszlású, ezért $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$
   (1 pont) $= \underline{\underline{46}}$

3. Egy faluban 20 darab 5 fős család lakik. Tudjuk, hogy a falu minden lakója egymástól függetlenül 0,1 valószínűséggel koronavírusos. A falu minden lakóját tesztelik egy olyan teszttel, ami tökéletes eredményt ad. A koronavírusos, illetve koronavírusos családtaggal rendelkező egyének karanténba kerülnek. Várhatóan hányan kerülnek karanténba?

   (1 pont) X: karanténba kerülők száma, Y: fertőzött taggal bíró családok száma
   (2 pont) $X = 5Y$
   (3 pont) $Y \sim B(20; p)$ valamilyen p-re, mert az egyes családok egymástól függetlenül kerülnek karanténba (míg az egyes családtagok egyszerre)
   p meghatározásához az alábbi valószínűséget kell meghatároznunk:
   (1 pont) $\mathbb{P}(\text{adott család karanténba kerül}) = \mathbb{P}(\text{5 főből valaki koronavírusos})$
   (2 pont) $= 1 - \mathbb{P}(\text{5 főből senki nem fertőzött})$
   (2 pont) $= 1 - \mathbb{P}(\text{1 fő nem fertőzött})^5$, mert függetlenek és azonos valószínűséggel lehetnek fertőzöttek
   (1 pont) $\mathbb{P}(\text{1 fő nem fertőzött}) = 1 - 0,1 = 0,9$
   (2 pont) Tehát $p = \mathbb{P}(\text{adott család karanténba kerül}) = 1 - 0,9^5$
   (1 pont) $\approx 0{,}4095$, vagyis $Y \sim B(20; 0{,}4095)$
   (2 pont) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(5Y) = 5\,\mathbb{E}(Y)$
   (2 pont) $= 5 \cdot n \cdot p = 5 \cdot 20 \cdot 0{,}4095$
   (1 pont) $\approx \underline{\underline{40{,}951}}$

4. Legyen Y olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye valamilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\alpha} e^{2x} & \text{ha } \ln(2) < x < \ln(5) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   Határozzuk meg $\mathbb{P}(Y > 1)$-et.

   (3 pont) $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x)\mathrm{d}x = 1$
   (3 pont) $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(x)\mathrm{d}x = 0 + \int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{4}{\alpha} e^{2x}\mathrm{d}x$
   (2 pont) $= \frac{2}{\alpha}\left[e^{2x}\right]_{\ln(2)}^{\ln(5)} = \frac{2}{\alpha}(5^2 - 2^2) = \frac{42}{\alpha}$
   (1 pont) $\Rightarrow \alpha = 42$
   (0 pont) Y folytonos valószínűségi változó, ezért
   (3+2 pont) $\mathbb{P}(a < Y < b) = \int_a^b f_Y(x)\mathrm{d}x$, speciálisan: $\mathbb{P}(Y > 1) = \int_1^{\infty} f_Y(x)\mathrm{d}x$ (Ha az általános formula nem szerepel, de a specifikus helyesen szerepel, akkor is 5 pont. Ha csak az általános, akkor 3 pont.)
   (3 pont) $= \int_1^{\ln(5)} \frac{4}{42} e^{2x}\mathrm{d}x$ (Ha a hiba az α rossz meghatározása miatt van, akkor is jár a 3 pont.)
   (2 pont) $= \frac{2}{42}\left[e^{2x}\right]_1^{\ln(5)}$ (A pont az előző pontban szereplő formula helyes kiintegrálásáért jár.)
   (1 pont) $= \frac{25 - e^2}{21} \approx \underline{\underline{0{,}8386}}$

5. Van egy dobozunk, amiben van 4 kék golyó. Legyen $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, valamilyen $\lambda > 0$ számra. Ha X legfeljebb kettő, akkor tegyünk X piros golyót a dobozba; ha X nagyobb, mint kettő, akkor nem teszünk piros golyót a dobozba. Ezután húzzunk ki egyenletesen véletlenszerűen egy golyót a dobozból. Annak az esélye, hogy pirosat húzunk, éppen 0,7-szer annyi, mint hogy 1 db piros golyót tettünk a dobozba. Mennyi a dobozba tett piros golyók számának várható értéke (mielőtt kihúztunk volna bármit is)?

(1 pont) Jelölje A azt, hogy pirosat húzunk, és Y a dobozba tett piros golyók számát.
(1 pont) Tudjuk, hogy $\mathbb{P}(A) = 0{,}7 \cdot \mathbb{P}(Y = 1)$
(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = ?$
(0 pont) Az $\{Y = 0\}$, $\{Y = 1\}$, $\{Y = 2\}$ teljes eseményrendszer, ezért
(1 pont) a teljes valószínűség tétele miatt
(3 pont) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid Y = 0)\,\mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(A \mid Y = 1)\,\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(A \mid Y = 2)\,\mathbb{P}(Y = 2)$
(1 pont) $\mathbb{P}(A \mid Y = 0) = 0$, hiszen ha nincs piros golyó a dobozban, akkor nincs mit kihúzni.
(1 pont) $\mathbb{P}(A \mid Y = 1) = \frac{1}{5}$ és $\mathbb{P}(A \mid Y = 2) = \frac{2}{6}$, klasszikus valószínűséggel számolva.
(1+1 pont) $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}$, hiszen $X \sim \text{Pois}(\lambda)$,
és hasonlóan, $\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$
(2 pont) Tehát

$$\mathbb{P}(A) = 0 + \frac{1}{5}\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} + \frac{2}{6}\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \left(\frac{\lambda}{5} + \frac{\lambda^2}{6}\right)e^{-\lambda}$$

$$0{,}7\,\mathbb{P}(Y = 1) = 0{,}7 \cdot \lambda e^{-\lambda}$$

(1 pont) Leegyszerűsítve $\lambda e^{-\lambda}$-val: $\frac{1}{5} + \frac{\lambda}{6} = \frac{7}{10}$
(1 pont) $\Rightarrow \lambda = 3$
(3 pont) $\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(Y = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(Y = 2)$
(1 pont) $= 0 + 1 \cdot 3e^{-3} + 2\frac{3^2}{2}e^{-3}$
(1 pont) $\approx \underline{\underline{0{,}5974}}$

6.* Aladár, Béla és Cézár teniszeznek. Egy az egy ellen meccseket játszanak, elsőnek Aladár játszik Bélával. A soron következő meccset mindig az előző meccs nyertese játssza azzal, aki legutóbb nem játszott. Ha valaki kétszer egymás után nyer, akkor ő lesz a végső győztes, és nem játszanak tovább. A résztvevők ugyanolyan gyakorlottak, így mindegyikük azonos eséllyel nyeri az egyes meccseket; továbbá feltesszük, hogy egyik meccs sem döntetlen. Mi az esélye, hogy Aladár lesz a végső győztes?

(0 pont) Jelölés: Egy adott kimenetelhez tartozó meccs-sorozatot jelöljünk a győztesek kezdőbetűinek sorozatával, pl. ha a meccseket sorban Béla, Cézár, Aladár, Aladár nyeri, akkor ezt a kimenetelt $BCAA$ jelöli.
(4 pont) Ötlet/Észrevétel: Ha az első meccset Aladár nyeri, akkor amíg senki nem nyer kétszer egymás után, addig a sorozat jelölésében minden A után C, minden C után B és minden B után A kell következzen. Hasonlóan, ha az első meccset Béla nyeri, akkor B után C, C után A és A után B kell következzen, amíg valaki kétszer nem nyer.
(4 pont) Emiatt a kedvező esetek vagy $A(CBA)^*A$, vagy $(BCA)^+A$ alakúak, ahol * jelöli az adott részsorozat nulla- vagy többszöri ismétlését, és $^+$ az egy vagy többszöri ismétlését.
(1 pont) Jelöljük V-vel az {Aladár a végső győztes} eseményt. Ekkor

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V \cap \{\text{első meccset Aladár nyeri}\}) + \mathbb{P}(V \cap \{\text{első meccset Béla nyeri}\})$$

(2 pont) $= \mathbb{P}\left(A(CBA)^*A\right) + \mathbb{P}\left((BCA)^+A\right)$ ahol a $\mathbb{P}(.)$-ben lévő jelölés azt az eseményt jelöli, amelyben szereplő kimenetelek a megadott alakúak.
(2 pont) $= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(A(CBA)^kA\right) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}\left((BCA)^\ell A\right)$
(2 pont) Észrevétel: ha ω olyan kimenetel, ami egy n hosszú sorozattal írható le, akkor $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 2^{-n}$, a szorzási szabály miatt.
(2 pont) $\mathbb{P}(V) = \frac{1}{2^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k} + \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3\ell}$
(2 pont) $= \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{8}}$
(1 pont)$= \frac{5 \cdot 8}{16 \cdot 7} = \underline{\underline{\frac{5}{14}}}$