Pótló zárthelyi dolgozat

1. Tekintsük a síkon azt a téglalapot, aminek csúcsai az $(1;1)$, $(-1;1)$, $(-1;0)$ és $(1;0)$ pontok, és rajzoljunk bele egy háromszöget, melynek csúcsai $(1;0)$, $(-u;0)$ és $(0;v)$, valamilyen $0 < u, v \leq 1$ számokra. Válasszunk egyenletesen véletlenszerűen egy pontot a téglalapban. Jelölje A azt az eseményt, hogy a pont első koordinátája pozitív, és B azt az eseményt, hogy a pont a fenti háromszögbe esik. Tudjuk, hogy A és B függetlenek.
   (a) Határozzuk meg u értékét.
   (b) Legyen u az (a) feladatrészben meghatározott érték, és $v = 0{,}5$. Legfeljebb mekkora lehet egy olyan esemény valószínűsége, ami mind az A, mind a B eseményeket kizárja?

2. Főhősünk, Újvárosi Izsák szeret a kedvenc almafája alatt üldögélni. Tegyük fel, hogy minden nap ugyanolyan p eséllyel esik Izsák fejére alma (ahol $0 < p < 1$), az egyes napokon egymástól függetlenül. (Adott napon vagy esik a fejére alma, vagy nem; az nem számít, hogy egy nap hányszor.) Izsák kiszámolta, hogy ugyanannyi annak a valószínűsége, hogy a tizedik vizsgált napon esik a fejére először alma, mint annak a valószínűsége, hogy a 10 napból pontosan két olyan nap lesz, amikor esik a fejére alma. Átlagosan hányadik napon esik először a fejére alma (nem feltétlenül az első 10 napban)?

3. Egy faluban 20 darab 5 fős család lakik. Tudjuk, hogy a falu minden lakója egymástól függetlenül 0,1 valószínűséggel koronavírusos. A falu minden lakóját tesztelik egy olyan teszttel, ami tökéletes eredményt ad. A koronavírusos, illetve koronavírusos családtaggal rendelkező egyének karanténba kerülnek. Várhatóan hányan kerülnek karanténba?

4. Legyen Y olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye valamilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{4}{\alpha} e^{2x} & \text{ha } \ln(2) < x < \ln(5) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   Határozzuk meg $\mathbb{P}(Y > 1)$-et.

5. Van egy dobozunk, amiben van 4 kék golyó. Legyen $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, valamilyen $\lambda > 0$ számra. Ha X legfeljebb kettő, akkor tegyünk X piros golyót a dobozba; ha X nagyobb, mint kettő, akkor nem teszünk piros golyót a dobozba. Ezután húzzunk ki egyenletesen véletlenszerűen egy golyót a dobozból. Annak az esélye, hogy pirosat húzunk, éppen 0,7-szer annyi, mint hogy 1 db piros golyót tettünk a dobozba. Mennyi a dobozba tett piros golyók számának várható értéke (mielőtt kihúztunk volna bármit is)?

6.* Aladár, Béla és Cézár teniszeznek. Egy az egy ellen meccseket játszanak, elsőnek Aladár játszik Bélával. A soron következő meccset mindig az előző meccs nyertese játssza azzal, aki legutóbb nem játszott. Ha valaki kétszer egymás után nyer, akkor ő lesz a végső győztes, és nem játszanak tovább. A résztvevők ugyanolyan gyakorlottak, így mindegyikük azonos eséllyel nyeri az egyes meccseket; továbbá feltesszük, hogy egyik meccs sem döntetlen. Mi az esélye, hogy Aladár lesz a végső győztes?

Tudnivalók: A munkaidő 90 perc (+15 perc a megoldások feltöltésére). Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését.

Eloszlás neve	Jelölés	Ran(X)	$\mathbb{P}(X=k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n;p)$	$\{0,1,...,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,...\}$	$(1-p)^{k-1}p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1-e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$