Zárthelyi dolgozat
Megoldás

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Artimetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Az A és B esemény *nelteggüf**, ha teljesül rájuk, hogy

$$\frac{1}{\mathbb{P}(A\cap B)}=\frac{1}{\mathbb{P}(A)}+\frac{1}{\mathbb{P}(B)}.$$

(*: a független szó megfordítva)

Legyen most A, B és C három olyan esemény, amik páronként nelteggüfök, továbbá $B\cap C$ kizárja A-t. Ha tudjuk, hogy $\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=0{,}4$ és $\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=0{,}6$, akkor mennyi $\mathbb{P}(A)$?

(2 pont) $B\cap C$ kizárja A-t, (azaz $A\cap(B\cap C)=\emptyset$), ezért $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=0$.

(2 pont) $\mathbb{P}(B\cap C)=1\Big/\left(\frac{1}{0{,}4}+\frac{1}{0{,}4}\right)=0{,}2$.

(2+1 pont) $\mathbb{P}(A\cap B)=1\Big/\left(\frac{1}{\mathbb{P}(A)}+\frac{1}{0{,}4}\right)$, és ugyanez $\mathbb{P}(A\cap C)$-re.

(1 pont) Poincaré-formula alapján:

(4 pont) $\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$

(3 pont) Tehát ha $\mathbb{P}(A)$-t x-el jelöljük, akkor $0{,}6=x+2\cdot 0{,}4-2\cdot 1\Big/\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{0{,}4}\right)-0{,}2+0$. (Az x jelölés bevezetése nélkül is jár a pont.)

(1 pont) Leegyszerűsítve: $0{,}6=x+0{,}6-\dfrac{2\cdot 0{,}4\cdot x}{x+0{,}4}$

(2 pont) Felszorozva, átrendezve: $0{,}8\cdot x=x(x+0{,}4)$. Másodfokú egyenlet megoldásai: $x_1=0$, $x_2=0{,}4$.

(2 pont) Mivel $\mathbb{P}(A)>0$ (hiszen osztunk vele, és valószínűség), ezért $\mathbb{P}(A)=x=\underline{\underline{0{,}4}}$.

(Ha a 0 is megoldásként van feltüntetve, de a 0,4 helyesen szerepel: 1 pont.)

2. Legyen $X \sim B\left(2; \frac{5}{12}\right)$ és $A_i = \{X = i\}$, ahol $i = 0, 1, 2$. Egy nem nulla valószínűségű B eseményről tudjuk, hogy a $\mathbb{P}(B \mid A_0)$ valószínűségnek $\mathbb{P}(B \mid A_1)$ épp a kétszerese, illetve $\mathbb{P}(B \mid A_2)$ a háromszorosa. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(A_0 \mid B)$ valószínűséget.

   (2 pont) $\mathbb{P}(B \mid A_1) = 2 \cdot \mathbb{P}(B \mid A_0)$ és $\mathbb{P}(B \mid A_2) = 3 \cdot \mathbb{P}(B \mid A_0)$
   (Ha rossz oldalra került a szorzó: 0 pont.)
   (1 pont) $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(X = i) \quad (i = 0, 1, 2)$
   (2+1 pont) X binomiális eloszlású, ezért $\mathbb{P}(X = 0) = (1-p)^n = \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \dfrac{49}{144} \approx 0{,}3403$.
   Hasonlóan, $\mathbb{P}(X = 2) = p^n = \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \dfrac{25}{144} \approx 0{,}1736$.
   (Ha a $\mathbb{P}(X = 2)$ mennyiség van helyesen kiszámolva, de a $\mathbb{P}(X = 0)$ nincs, akkor 2 pont, a 2+1-ből.)
   (2 pont) $\mathbb{P}(X = 1) = \binom{2}{1} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{72} \approx 0{,}4861$. (Avagy $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) = \frac{144-25-49}{144} = \frac{35}{72}$)
   (1 pont) A_1, A_2, A_3 teljes eseményrendszer.
   (1 pont) Bayes-tétel:
   (4 pont)
   $$\mathbb{P}(A_0 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_0) \cdot \mathbb{P}(A_0)}{\mathbb{P}(B \mid A_0) \cdot \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B \mid A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2)}$$
   (Ha az egyszerű Bayes-tételre és a teljes valószínűség tételére külön-külön van hivatkozva, vagy direktben a feltételes valószínűségek kibontásával történik a megoldás, akkor is jár a pont. A felírt egyenletek helyes blokkjaira arányos részpontszám adható.)
   (3 pont) Behelyettesítve a fentieket:
   $$= \frac{\mathbb{P}(B \mid A_0) \cdot \frac{49}{144}}{\mathbb{P}(B \mid A_0) \cdot \frac{49}{144} + 2 \cdot \mathbb{P}(B \mid A_0) \cdot \frac{35}{72} + 3 \cdot \mathbb{P}(B \mid A_0) \cdot \frac{25}{144}}$$
   (2 pont) Leegyszerűsítve $\mathbb{P}(B \mid A_0)$-lal:
   $$= \frac{\frac{49}{144}}{\frac{49}{144} + 2 \cdot \frac{35}{72} + 3 \cdot \frac{25}{144}}$$
   (1 pont) $= \frac{49}{264} \approx \underline{\underline{0{,}1856}}$.

3. Legyen X olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye valamilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén
   $$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^3} & \text{ha } x > 2 \\ \dfrac{\alpha}{(4-x)^3} & \text{egyébként.} \end{cases}$$
   Határozzuk meg $\mathbb{E}(X)$-et.

   (3 pont) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$
   (3 pont) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \alpha x^{-3}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{2} \alpha(4-x)^{-3}\,\mathrm{d}x =$
   (2 pont) $\alpha \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_2^{+\infty} + \alpha \left[\frac{(4-x)^{-2}}{2}\right]_{-\infty}^{2} = \alpha\left(0 - (-\frac{1}{8})\right) + \alpha\left(\frac{1}{8} - 0\right) = \frac{1}{4}\alpha$
   (1 pont) $\alpha = 4$
   (0 pont) X folytonos valószínűségi változó, ezért
   (3 pont) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x$
   (4 pont) $= 4\int_2^{+\infty} x^{-2}\,\mathrm{d}x + 4\int_{-\infty}^{2} x(4-x)^{-3}\,\mathrm{d}x =$
   (2 pont) $4\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^{+\infty} + 4\left(\left[x\frac{(4-x)^{-2}}{2}\right]_{-\infty}^{2} - \int_{-\infty}^{2} \frac{(4-x)^{-2}}{2}\,\mathrm{d}x\right) =$
   (1 pont) $4\left(0 + \frac{1}{2}\right) + 4\left(\left(\frac{1}{4} - 0\right) - \left[\frac{(4-x)^{-1}}{2}\right]_{-\infty}^{2}\right) = 3 - 4\left(\frac{1}{4} - 0\right) = 2$
   (1 pont) $\mathbb{E}(X) = \underline{\underline{2}}$
   (A logikailag teljes megoldáshoz hozzá tartozna annak indoklása is, hogy $\mathbb{E}(X)$ véges, de ennek hiányáért nem vonunk le pontot. A végesség többek közt úgy vezethető le, hogy mind az X^+ pozitív rész, mind az X^- negatív rész véges várható értékű. A várható érték szimmetria-érveléssel is kiszámolható.)

4. Béla szereti a nagyfelbontású TV-ket, így vesz egy 128K felbontásút. Mikor az megérkezik, dühösen konstatálja (az elektronmikroszkópjával a kezében), hogy öt pixel hibás. Béla némi kutatómunkával kideríti, hogy annak az esélye, hogy két pixelhiba van a képen, pontosan annyi, mint annak az esélye, hogy három pixel hibás. Feltehetjük, hogy az egyes pixelek egymástól függetlenül, azonos, egyenként kis valószínűséggel hibásodnak meg. Mennyire volt peches Béla, azaz mekkora az esélye, hogy éppen öt pixel hibásodik meg egy ilyen képernyőn?

   (1 pont) X: hibás pixelek száma
   (2 pont) $\mathbb{P}(X = 5) =?$
   (4 pont) $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, indoklás: egymástól független, azonos, kis valószínűségű események közül a sikeres kísérletek száma.
   (3 pont) $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3)$
   (4 pont) $\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}$
   (2 pont) $\lambda = 3$
   (2 pont) $\mathbb{P}(X = 5) = \frac{3^5}{5!}e^{-3}$
   (2 pont) $\approx \underline{\underline{0{,}1008}}$.

5. Nyuszika szeretne répatortát venni. A környéken 4 cukrászdát ismer, amik közül csak kettőben árulnak répatortát, de nem tudja melyekben. Amely cukrászdában árulnak, ott sem minden nap van készleten: az egyes napokon egymástól függetlenül, $\frac{1}{3}$ eséllyel lehet répatortát kapni. Nyuszika minden nap egy új cukrászdát látogat meg (egyenletesen véletlenszerűen választva), amíg nem talál olyat, ahol árulnak répatortát. Ha talált ilyen helyet, akkor addig jár vissza ugyanide naponta, amíg tortavásárlása sikerrel nem jár.

   (a) Mi az esélye, hogy a k-adik napon talál először répatortát áruló boltot? $(1 \leq k \leq 3)$
   (b) Ha már megtalálta a megfelelő boltot, mi az esélye, hogy összesen épp ℓ-szer kell idelátogatnia, hogy végül tortához jusson? $(1 \leq \ell)$
   (c) Összesen, várhatóan hány napba telik répatortához jutnia?

   (2 pont) X: hányadik napon talál először répatortát áruló boltot. Így az (a) kérdés: $\mathbb{P}(X = k) =?$, ahol $k = 1, 2, 3$. (Ha az (a) feladat val. változó bevezetése nélkül van megoldva, akkor is jár a pont.)
   (1 pont) $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
   (3 pont) Szorzási szabály (vagy egyéb szöveges indoklás) miatt: $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ és $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$.
   (Ha csak az egyik eredmény helyes: 2 pont. Ha az eredmény nincs indokolva, legfeljebb 2 pont.)
   (2 pont) Y: hányszor kell meglátogassa a boltot, ahol végre talál répatortát, hogy venni is tudjon. Így a (b) kérdés: $\mathbb{P}(Y = \ell) =?$, ahol $\ell \geq 1$. (Ha a (b) feladat valószínűségi változó bevezetése nélkül van megoldva, akkor is jár a pont.)
   (3 pont) $Y \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{3}\right)$, indoklás: azonos eloszlású, független kísérletek közül az első siker időpontja.
   (1 pont) $\mathbb{P}(Y = \ell) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{\ell-1}\frac{1}{3}$
   (2 pont) Hány napba telik répatortához jutnia: $X + Y - 1$. (A -1-re azért van szükség, mert az első olyan nap, amikor olyan boltba megy, ahol árulnak répatortát, az beleszámít mind X, mind Y értékébe. Ha a -1 hiányzik a megoldásból, 1 pont.)
   (3 pont) A várható érték linearitása miatt $\mathbb{E}(X + Y - 1) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) - 1$. (Ha csak az additivitásra van hivatkozás, akkor is jár a pont. Ha nincs indoklás vagy előadásra hivatkozás, legfeljebb 2 pont.)
   (1 pont) $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$
   (1 pont) $\mathbb{E}(Y) = 1 \Big/ \frac{1}{3}$ mert $\text{Geo}\left(\frac{1}{3}\right)$.
   (1 pont) Tehát $\mathbb{E}(X + Y - 1) = \frac{5}{3} + 3 - 1 = \frac{11}{3} \approx \underline{\underline{3{,}667}}$.

6.* Adott két doboz, az elsőben 10 db piros golyó, a másodikban 10 db kék golyó van. A következő lépéssorozatot hajtjuk végre: minden egyes körben előbb kiveszünk egy véletlenszerűen választott golyót az első dobozból, aztán egy véletlenszerűen választott golyót átrakunk a második dobozból az elsőbe. Ezt ismételgetjük addig, amíg el nem fogynak a golyók a második dobozból. Végül húzunk egy golyót az első dobozból, mi az esélye, hogy ez piros?

(1 pont) Észrevétel: a "végül" húzott golyó, a 11-edik húzás eredménye.
(4 pont) Ötlet: Számozzuk meg a piros golyókat 1-től 10-ig.
(4 pont) Legyen $A_i = \{\text{végül az } i\text{-edik piros golyót húzzuk}\}$, ahol $i = 1, 2, \ldots, 10$. Ekkor a vizsgált esemény, vagyis a $\{\text{végül piros golyót húzunk}\}$ éppen az A_i események diszjunkt uniója.
(3 pont) Elég az A_i események valószínűségeit külön-külön meghatározni, hiszen $\mathbb{P}(\text{végül piros golyót húzunk}) = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{P}(A_i)$
(4 pont) Az észrevétel miatt $A_i = \{\text{nem húzzuk ki az } i\text{-edik piros golyót az első 10 húzásban, de 11-ediknek igen}\}$
(3 pont) Ezt felhasználva, a szorzási szabály miatt $\mathbb{P}(A_i) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \cdot \frac{1}{10}$
(1 pont) Tehát a végeredmény: $\sum_{i=1}^{10} \mathbb{P}(A_i) = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx \underline{\underline{0{,}3487}}$.