Zárthelyi dolgozat

1. Az A és B esemény *nelteggüf**, ha teljesül rájuk, hogy
$$\frac{1}{\mathbb{P}(A \cap B)} = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} + \frac{1}{\mathbb{P}(B)}.$$
(*: a független szó megfordítva)

   Legyen most A, B és C három olyan esemény, amik páronként nelteggüfök, továbbá $B \cap C$ kizárja A-t. Ha tudjuk, hogy $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 0{,}4$ és $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 0{,}6$, akkor mennyi $\mathbb{P}(A)$?

2. Legyen $X \sim B\left(2; \frac{5}{12}\right)$ és $A_i = \{X = i\}$, ahol $i = 0, 1, 2$. Egy nem nulla valószínűségű B eseményről tudjuk, hogy a $\mathbb{P}(B \mid A_0)$ valószínűségnek $\mathbb{P}(B \mid A_1)$ épp a kétszerese, illetve $\mathbb{P}(B \mid A_2)$ a háromszorosa. Határozzuk meg a $\mathbb{P}(A_0 \mid B)$ valószínűséget.

3. Legyen X olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye valamilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^3} & \text{ha } x > 2 \\ \dfrac{\alpha}{(4-x)^3} & \text{egyébként.} \end{cases}$$
Határozzuk meg $\mathbb{E}(X)$-et.

4. Béla szereti a nagyfelbontású TV-ket, így vesz egy 128K felbontásút. Mikor az megérkezik, dühösen konstatálja (az elektronmikroszkópjával a kezében), hogy öt pixel hibás. Béla némi kutatómunkával kideríti, hogy annak az esélye, hogy két pixelhiba van a képen, pontosan annyi, mint annak az esélye, hogy három pixel hibás. Feltehetjük, hogy az egyes pixelek egymástól függetlenül, azonos, egyenként kis valószínűséggel hibásodnak meg. Mennyire volt peches Béla, azaz mekkora az esélye, hogy éppen öt pixel hibásodik meg egy ilyen képernyőn?

5. Nyuszika szeretne répatortát venni. A környéken 4 cukrászdát ismer, amik közül csak kettőben árulnak répatortát, de nem tudja melyekben. Amely cukrászdában árulnak, ott sem minden nap van készleten: az egyes napokon egymástól függetlenül, $\frac{1}{3}$ eséllyel lehet répatortát kapni. Nyuszika minden nap egy új cukrászdát látogat meg (egyenletesen véletlenszerűen választva), amíg nem talál olyat, ahol árulnak répatortát. Ha talált ilyen helyet, akkor addig jár vissza ugyanide naponta, amíg tortavásárlása sikerrel nem jár.
   (a) Mi az esélye, hogy a k-adik napon talál először répatortát áruló boltot? ($1 \leq k \leq 3$)
   (b) Ha már megtalálta a megfelelő boltot, mi az esélye, hogy összesen épp ℓ-szer kell idelátogatnia, hogy végül tortához jusson? ($1 \leq \ell$)
   (c) Összesen, várhatóan hány napba telik répatortához jutnia?

6.* Adott két doboz, az elsőben 10 db piros golyó, a másodikban 10 db kék golyó van. A következő lépéssorozatot hajtjuk végre: minden egyes körben előbb kiveszünk egy véletlenszerűen választott golyót az első dobozból, aztán egy véletlenszerűen választott golyót átrakunk a második dobozból az elsőbe. Ezt ismételgetjük addig, amíg el nem fognak a golyók a második dobozból. Végül húzunk egy golyót az első dobozból, mi az esélye, hogy ez piros?

Tudnivalók: A vizsga időtartama 90 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Eloszlás neve	Jelölés	$\mathrm{Ran}(X)$	$\mathbb{P}(X=k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n;p)$	$\{0,1,...,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,...\}$	$(1-p)^{k-1}p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1-e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$