Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

1. ZH javítókulcs (2017. 03. 09.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Az egyfejű sárkány párt A, B, C és D aktivistái négy helyszínen gyűjtenek aláírást annak érdekében, hogy lovagi tornát rendezzenek Süsü és Jó Királyfi részvételével. Mivel a különböző helyszíneken az egyes aktivisták szeméyes varázsa másképp érvényesül, nem mindegy, hogy ki hol gyűjt. A mellékelt táblázat mutatja, hány aláírásra számítunk az **1**-es, **2**-es, **3**-as ill. **4**-es helyszíneken az egyes aktivisták közreműködése esetén. Határozzuk meg, mennyi a begyűjthető aláírások maximális száma, adjunk meg egy optimális beosztást és igazoljuk, hogy egyetlen más beosztás esetén sem várható ennél magasabb eredmény.

	1	**2**	**3**	**4**
A	4	7	3	7
B	1	4	3	7
C	6	9	7	10
D	4	5	4	8

Maximális súlyú párosítást kell keresnünk abban a páros gráfban, amelynek egyik színosztályában az A, B, C és D, míg a másikban az $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$ csúcsok találhatók. (1 pont)

	1	**2**	**3**	**4**				
A	4	$\boxed{7}$	3	7	7	7	5	5
B	1	4	3	$\boxed{7}$	7	6	4	3
C	6	9	$\boxed{7}$	10	10	9	7	7
D	$\boxed{4}$	5	4	8	8	7	5	4
	0	0	0	0				
	0	0	0	1				
	0	2	0	3				
	0	2	0	4				

Az órán tanult, Egerváryhoz köthető algoritmussal dolgozunk. A kiindulási súlyozott lefogás az A, B, C és D csúcsokon a megfelelő sormaximum, azaz $7, 7, 10$ és 8, a többi csúcson 0. (2 pont)
Az ábrán láthatók az algoritmust követve kapott súlyozott lefogások, bekeretezve pedig az optimális párosítás elemei. (3 pont)
Egy 25 súlyú párosítást és egy 25 összsúlyú lefogást kaptunk. Ezek szerint az előbbi maximális súlyú párosítás, így a várhatóan begyűjtött szavazatok maximális száma pontosan 25. (3 pont)
Optimális beosztás pedig például az, ha A a **2**-es, B a **4**-es, C a **3**, végül pedig D az **1**-es helyszínen gyűjt. (1 pont)

2. Az órán tanult Fourier-Motzkin elimináció segítségével állapítsuk meg, hogy van-e valós megoldása az itt látható egyenlőtlenségrendszernek. (Tehát ha van megoldás, azt nem szükséges konkrétan megadni, bátran használható a mátrixos alak.)

$$x_1 + 4x_2 - 7x_3 \geq 3$$
$$x_1 + 4x_2 - 8x_3 \leq -1$$
$$x_1 + 7x_2 - 1x_3 \leq 12$$
$$x_1 - x_2 - 12x_3 \leq -2$$

(A feladatlapon a 4. egyenlőtlenség hibásan szerepelt, de ez a dolgozatírás közben helyesbítve lett.)

Felírjuk a lineáris egyenlőtlenségrendszert mátrixos alakban úgy, hogy az egyenlőtlenségek azonos irányba álljanak, azaz az első egyenlőtlenséget -1-gyel megszorozzuk. (2 pont)
Végrehajtjuk a Fourier-Motzkin eliminációt, azaz a változókat egymás után elimináljuk úgy, hogy először elérjük, hogy az eliminálandó változó együtthatója 0 vagy ± 1 legyen, majd a 0 együtthatós sorokat lemásoljuk, és hozzávesszük az 1 és -1 együtthatós sorokból képzett összes lehetséges összeget. (3 pont)

A konkrét végrehajtás: $\left.\begin{array}{rrr|r} -1 & -4 & 7 & -3 \\ 1 & 4 & -8 & -1 \\ 1 & 7 & -1 & 12 \\ 1 & -1 & -12 & -2 \end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right.$ (3 pont)

A $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 \leq -2$ egyenlőtlenség adódott, ami ellentmondás. Tehát a vizsgált egyenlőtlenségrendszernek nincs megoldása. (2 pont)

---

3. (a) Oldjuk meg az alábbi lineáris programozási feladatot!

   (b) Meg lehet-e változtatni a célfüggvényt úgy, hogy az $x_1 = 4, x_2 = 6$ optimális megoldás legyen? Ha igen, akkor mutassunk példát ilyen célfüggvényre!

$$\begin{aligned} \max\{9x_1 + 5x_2\} &\text{ ha} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 18 \\ 6x_1 + x_2 &\leq 30 \end{aligned}$$

Az (x_1, x_2) megoldásokat a síkon ábrázoljuk. A feltételek egy-egy félsíknak felel meg. A megoldások e félsíkok metszete, egy konvex taromány alkotja. Ezen kell optimalizálnunk a célfüggvényt. (1 pont)
A nemnegativitási feltételek a pozitív síknegyedet adják, ebből vág le a három félsík egy konvex ötszöget. Az ötszöget határoló egyes egyenesek a 12 és 12, a 6 és 18, ill. az 5 és 30 pontokban metszik az egyes koordinátatengelyeket. Egy ezt ábrázoló rajzért is jár a (2 pont)
A konvex ötszög csúcsai tehát a $(0, 0), (0, 12)$, és $(5, 0)$ pontok, és kis számolással adódik a maradék két csúcs: $(4, 6), (3, 9)$. (2 pont)
Bármi is legyen a célfüggvény, az optimumát bizonyosan felveszi a fenti 5 pont valamelyikében, ezért csupán ezek közül kell kiválasztani azt, amelyik a maximalizál. (1 pont)
Ez pedig konkrétan az $x_1 = 3, x_2 = 9$ megoldáshoz tartozik, (1 pont)
az optimumérték pedig 72. (0 pont)
Mivel a $(4, 6)$ csúcsa a megoldások alkotta konvex tartománynak, ezért alkalmas célfüggvénnyel elérhető, hogy optimális megoldás legyen: pl épp ilyet ad egy olyan egyenlőtlenség a feltételek közül, amely egyenlőséggel teljesül a $(4, 6)$ megoldásra. Konkétan az $3x_1 + x_2 \leq 18$ ilyen, ezért ha a célfüggvény $\max\{3x_1 + x_2\}$ lenne, akkor a kérdezett megoldás optimális. (3 pont)
Ugyanilyen jó célfüggvényt kapunk a másik egyenlőséggel teljesülő feltételből is: $\max\{6x_1 + x_2\}$, de minden olyan $\max\{ax_1 + bx_2\}$ célfüggvény megfelel, amelyre $3b \leq a \leq 6b$ áll fenn. (0 pont)

Aki ebben a feladatban csupán a duális programot írja fel, az nem jut közelebb a megoldáshoz (hisz a duálist is optimalizálni kell), ezért 0 pontot kap.

---

4. Határozzuk meg annak a lineáris programnak a duálisát, amit a harmadik feladatbeliből úgy kapunk, hogy elhagyjuk a nemnegativitási feltételeket, az egyenlőtlenségek irányát megfordítjuk, és a célfüggvényt minimalizálni szeretnénk.

Az órán tanult szabály alapján felírjuk a szamárvezetőként használt táblázatot, amihez a megfordított irányú egyenlőtlenségekkel. (1 pont)

	x_1	x_2	
y_1	1	1	≥ 12
y_2	3	1	≥ 18
y_3	6	1	≤ 30
	9	5	

(3 pont)
Mivel csupa egyenlőtlenségből áll az LP, a DLP-beli duális változók nemnegatívak, (2 pont)
az előjelkötetlen x-ekhez tartozó duális feltételek pedig egyenlőséggel teljesülnek. (2 pont)
Ennek alapján a duális

$$\begin{aligned} \max\{12y_1 + 18y_2 + 30y_3\} &\text{ ha} \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \\ y_1 + 3y_2 + 6y_3 &= 9 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 5 \end{aligned}$$

(2 pont)