

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

2. ZH javítókulcs (2025.05.08. 18-20, E1B)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. a) Írjuk fel a jobbra látható LP feladat duálisát (a primál feladatéhoz hasonló alakban). **(10 pont)**
 b) Igaz-e, hogy a primál feladatnak $x_1 = 5$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ optimális megoldása, míg a duálisának optimális megoldása az, ahol az első három változó értéke 1, a többi 0? **(4 pont)**

$$\begin{aligned} \max & 6x_1 + 2x_2 + 10x_3, \text{ ha} \\ & 3x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 26 \\ & 2x_2 - 7x_3 \geq -16 \\ & 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 6 \\ & x_1 + 6x_3 \leq 21 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Megoldás: a) Először hozzuk sztenderd alakra a rendszert. Mivel a célfüggvényben maximalizálunk, a lineáris feltételek $=$ és $\leq$ alakúak lehetnek (a nemnegativitási feltételek megmaradnak). Így a sztenderd alak az alábbi:

$$\begin{aligned} \max & 6x_1 + 2x_2 + 10x_3, \text{ ha} \\ & 3x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 26 \\ & -2x_2 + 7x_3 \leq 16 \\ & 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 6 \\ & x_1 + 6x_3 \leq 21 \\ & x_2 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned} \quad \text{(1 pont)}$$

A dualizálási ökölszabályok szerint a duális (DLP) feladat változói a primál (LP) feltételeinek (az együtthatómátrix sorainak) felelnek meg, **(1 pont)**
 pontosan azon duál változók nemnegatívak, ahol a megfelelő primál feltételben egyenlőség van, **(1 pont)**
 mivel az LP-ben maximalizálunk, a DLP célfüggvényében minimalizálunk, **(1 pont)**
 az optimalizálandó mennyiség pedig a duál változóknak a primál feltételek jobb oldalával vett kombinációja, **(1 pont)**
 a DLP lineáris feltételeinek jobb oldalai a primál célfüggvény együtthatói, **(1 pont)**

és mivel a DLP is sztenderd alakú, $=$ és $\geq$ relációk szerepelhetnek, mégpedig pontosan a nemnegatív primál változóknak megfelelő duális feltételeknél lesz egyenlőség. **(1 pont)**

Felrajzolhatjuk a számárvezetőt is:

Ezek alapján a DLP a primálihoz hasonló alakban:

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq & & \\ & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 \leq y_1 & \begin{array}{|ccc|} \hline 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \leq 26 \\ 0 \leq y_2 & & \leq 16 \\ & y_3 & = 6 \\ 0 \leq y_4 & & \leq 21 \\ 0 \leq y_5 & & \leq 0 \\ & \geq & = & = \\ & 6 & 2 & 10 \end{array} \quad \text{(2 pont)}$$

$$\begin{aligned} \min & \{26y_1 + 16y_2 + 6y_3 + 21y_4\} \\ \text{ha} & \\ & 3y_1 + 3y_3 + y_4 \geq 6 \\ & -y_1 - 2y_2 + 5y_3 + y_5 = 2 \\ & 5y_1 + 7y_2 - 2y_3 + 6y_4 = 10 \\ & y_1, y_2, y_4, y_5 \geq 0 \end{aligned}$$

(1 pont)

(Itt az együtthatómátrix helyes megállapítására jár a pont, külön pont, ha x_2 -nél a nempozitivitási feltételt nem a nemnegativitási feltétellel analóg módon, hanem a tanultaknak megfelelően lineáris feltételként értelmezzük.)

b) Az LP feltételeibe behelyettesítve az adott x_1, x_2, x_3 értékeket könnyen kiszámolhatjuk, hogy a megoldás-jelöltünk mindegyiknek megfelel: a nemnegativitási feltételek triviálisak, a lineáris feltételek pedig egyenlőséggel teljesülnek. A DLP-nél hasonló a helyzet. **(1 pont)**

A primál és a duál célfüggvények értéke az adott megoldásra egyaránt 48. **(1 pont)**

Mivel tetszőleges primál megoldásra a maximalizálandó célfüggvény értéke legföljebb annyi, mint tetszőleges duál megoldásra a minimalizálandó duál célfüggvény értéke, **(1 pont)**

nincs olyan LP megoldás, mely 48-nél nagyobb, sem olyan DLP megoldás, mely 48-nél kisebb célfüggvény-értéket eredményezne. **(1 pont)**

2. Besúgóhálózatot szervezünk a faluban. Informátoraink elkészítették azt a G gráfot, melynek csúcsai a falu lakosai, és akkor van él két csúcs (lakos) között, ha azoknak van lehetősége megfigyelni egymást (ezek a lehetőségek kölcsönösek). Ismert továbbá a beszervezhető lakosok $B \subset V(G)$ halmaza, valamint minden $v \in B$ beszervezhető lakos esetén a $c(v)$ beszerzési költség. Olyan hálózatot szeretnénk kiépíteni, hogy minden lakost legalább három besúgó tarthasson megfigyelés alatt (ez még a beszervezett lakosokra is vonatkozik; persze önmagát senki sem figyelheti meg). Írjunk föl olyan IP feladatot, melynek segítségével megkapható a minimális beszerzési költség. **(9 pont)**

Megoldás: Minden $v \in B$ beszervezhető lakoshoz definiáljunk egy $x(v)$ változót, **(1 pont)**

melyek legyenek binárisak, azaz $\forall v \in B: x(v) \geq 0, x(v) \leq 1, x(v) \in \mathbb{Z}$, **(1 pont)**

tervezett jelentésük, hogy $x(v) = 1 \iff$ a v lakost beszervezzük. **(1 pont)**

A beszerzési feltételeket teljesítendő minden $v \in V(G)$ -re

$$\sum_{u \in N(v) \cap B} x(u) \geq 3$$

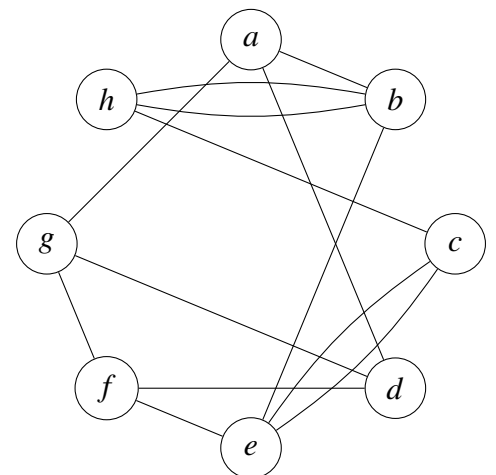
lineáris feltételt írunk elő, ahol $N(v)$ a v csúcs szomszédainak halmaza G -ben; szavakkal megfogalmazva ez azt jelenti, hogy minden v lakosra vesszük az őt megfigyelni képes, beszervezhető u lakosokhoz rendelt változók összegét, és ez legyen legalább 3. **(4 pont)**

Így tetszőleges megoldás esetén az $\{v \in B: x(v) = 1\}$ halmaz megfelelő beszervezést ad, és bármely megfelelő beszerzés esetén a beszervezett lakosok változóit 1-re választva megoldást kapunk. **(1 pont)**

A költséget minimalizálandó a célfüggvény legyen $\min \sum_{v \in B} c(v)x(v)$. **(1 pont).**

3. a) Adjuk meg az ábrán látható gráf egy minimális méretű elvágó élhalmazát (vágását) a Nagamochi–Ibaraki-algoritmus segítségével. Amikor egy lépés során több csúcs közül is lehet választani, akkor mindig azt válasszuk, amelyik betűrendbe sorolva a legelső közülük. **(11 pont)**

b) Van-e olyan maxvissza sorrendje a csúcsoknak, melyben b az utolsó csúcs? **(5 pont)**



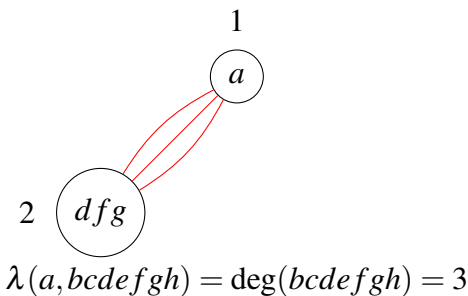
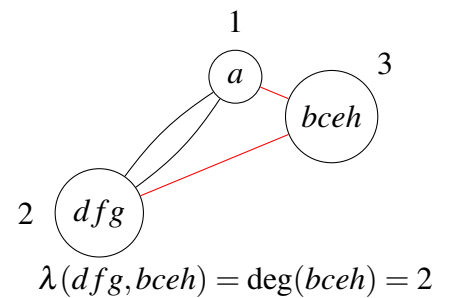
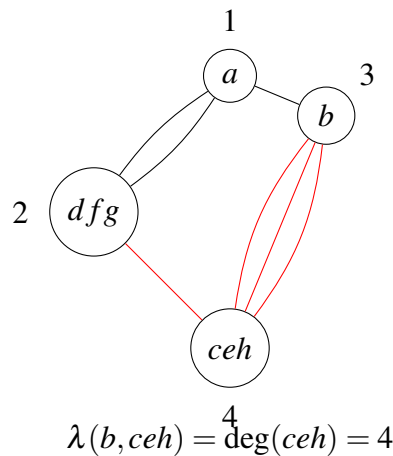
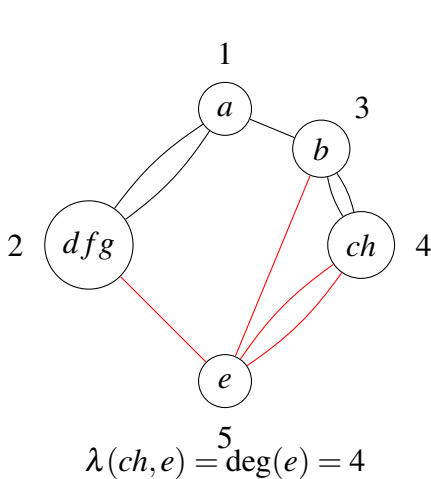
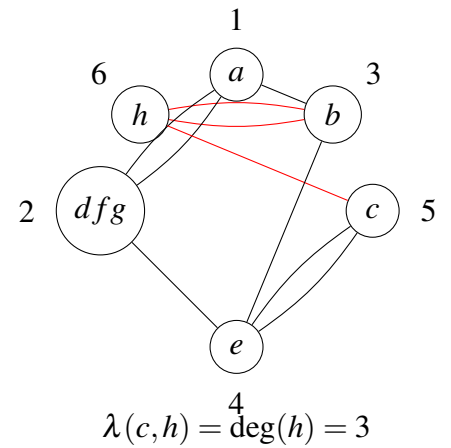
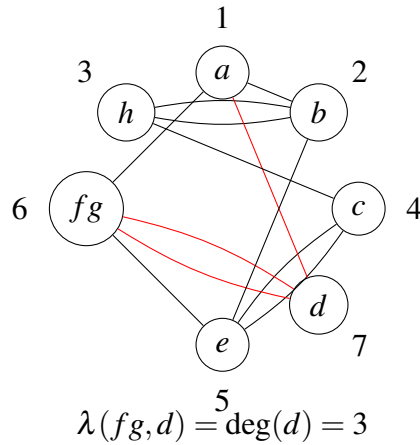
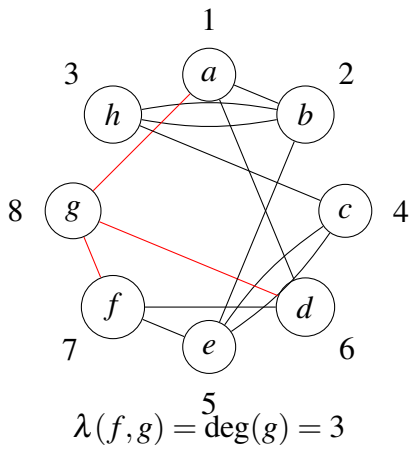
Nagyon figyeljünk oda a gráf ábrázolásának és az algoritmus lépéseinek pontos kivitelezésére, mert könnyű elrontani!

Megoldás: a) A pontok az alábbi bontásban járnak:

eljárás helyes ismerete (maxvissza sorrend keresése, utolsó csúcs alapján kapott vágásjelölt mérete és éleinek halmaza, csúcsösszeolvasztás): **(4 pont)**

eljárás lépéseinek helyes kivitelezése: **(5 pont)**

A kivitelezés részletei (maxvissza sorrendek a számozás alapján, minvágásjelöltek pirossal):



A minimális vágásjelöltet a hatodik lépésben kapjuk, mely kettő élből áll, melyek a $\{b,c,e,h\}$ csúcshalmazból lépnek ki az eredeti gráfban. Ezek a ba és az ef élek, ezek tehát egy minimális méretű vágást alkotnak (valóban: törölve őket a gráf két komponensre hullik). **(2 pont)**

- b)** Ha volna, és az utolsó előtti csúc v , akkor a tanult lemma alapján $\lambda(b,v) = d(b) = 4$ volna. **(1 pont)**
 De persze $\lambda(b,v) \leq d(v)$ is igaz (hiszen a v -ből kilépő élek is egy vb -vágást alkotnak), tehát $d(v) \geq 4$ volna, így kizárólag $v = e$ jöhet szóba. **(2 pont)**
 Node ab, hc, be elvágják b -t és e -t, tehát $\lambda(b,e) \leq 3$, ellentmondás. **(2 pont)**

4. Legyen G egy olyan gráf, melynek összefüggőségi száma és élösszefüggőségi száma egyaránt 10. Vegyünk két példányt G -ből, és húzzunk be ezek közé három új élt (tehát mindegyik új élnek az egyik végpontja G egyik példányában van, a másik végpontja a másikban), és jelöljük a kapott gráfot G' -vel. Mi lehet G' összefüggőségi és élösszefüggőségi száma?

(Ez esetleg függhet attól, hogyan húztuk be az új éleket. Ha csak egy érték lehetséges, akkor határozzuk azt meg. Ha több is, akkor adjuk meg a kérdéses számok legkisebb és legnagyobb lehetséges értékét (és indokoljuk is meg, hogy azok miért a legnagyobbak / legkisebbek), majd az esetleges köztes értékeket is vizsgáljuk meg, hogy azok közül melyik realizálható.) **(11 pont)**

Megoldás: A három új élt kitörölve nem marad összefüggő, tehát G' nem 4-élösszefüggő. **(1 pont)**

Legfeljebb két élt tetszőlegesen törölve G mindkét példányja összefüggő marad (hiszen azok 9 él törlését is kibírják), **(1 pont)**

és a három új él közül legalább egy megmarad, tehát megmarad az összefüggőség. **(1 pont)**

Tehát bárhogyan is húzzuk be az új éleket, minden esetben $\lambda(G') = 3$. **(1 pont)**

G' nyilván összefüggő, így $\kappa(G') \geq 1$. **(1 pont)**

Ha az új élek G egyik példányában k különböző csúcsot fednek le (ahol $1 \leq k \leq 3$), akkor $\kappa(G') \leq k$, hiszen G megfelelő példányából törölve az új élek által lefedett k csúcsot megszűnik az összes él G két példánya között, **(2 pont)**

és mivel $\kappa(G) = 10$, ezért $|V(G)| \geq 11$, így nem törölhettük az összes csúcsot ebből a példányból, tehát valóban két komponens keletkezik. **(1 pont)**

Így $\kappa(G') \leq k \leq 3$. **(1 pont)**

És $\kappa(G') = k$ valóban előfordulhat $k = 1, 2, 3$ -ra is: húzzuk be úgy az új éleket, hogy az egyik példányban k , a másikban 3 csúcsot fedjenek. A korábbiak miatt csak azt kell belátni, hogy tetszőleges $k - 1$ csúcsot törölve összefüggő marad, és ez mindegyik esetben könnyen látható. **(2 pont)**

(A két pont itt a $k = 2$ és $k = 3$ eset vizsgálatára jár, a $k = 1$ esetre a jelen gondolatmenet szerint már korábban kaptunk pontot.)