

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

2. ZH (2025.05.08. 18-20, E1B)

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Kérjük, minden résztvevő a **nevét**, a **Neptun kódját** és a **gyakorlatvezetőjének nevét** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában olvashatóan és helyesen tüntesse fel, illetve egy személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata nem megengedett (számológép sem). Mobiltelefon még kikapcsolt állapotban sem lehet a hallgató keze ügyében. Az indoklás nélküli eredményközlést nem értékeljük. Megindokolt részeredményekért részpontszám kapható.

1. a) Írjuk fel a jobbra látható LP feladat duálisát (a primál feladathoz hasonló alakban). **(10 pont)**

b) Igaz-e, hogy a primál feladatnak $x_1 = 5$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ optimális megoldása, míg a duálisának optimális megoldása az, ahol az első három változó értéke 1, a többi 0? **(4 pont)**

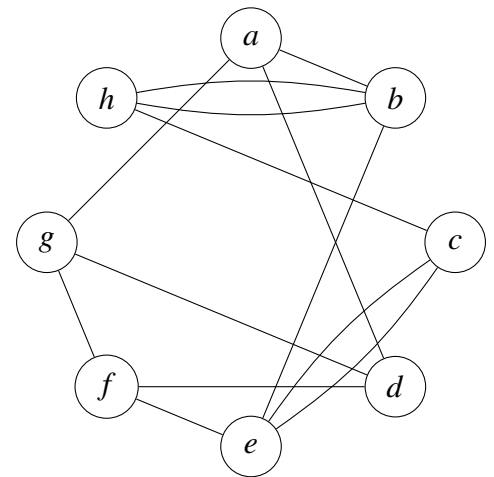
$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 2x_2 + 10x_3, \text{ ha} \\ & 3x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 26 \\ & 2x_2 - 7x_3 \geq -16 \\ & 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 6 \\ & x_1 + 6x_3 \leq 21 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

2. Besúgóhálózatot szervezünk a faluban. Informátoraink elkészítették azt a G gráfot, melynek csúcsai a falu lakosai, és akkor van él két csúc (lakos) között, ha azoknak van lehetősége megfigyelni egymást (ezek a lehetőségek kölcsönösek). Ismert továbbá a beszervezhető lakosok $B \subset V(G)$ halmaza, valamint minden $v \in B$ beszervezhető lakos esetén a $c(v)$ beszerzési költség. Olyan hálózatot szeretnénk kiépíteni, hogy minden lakost legalább három besúgó tarthasson megfigyelés alatt (ez még a beszervezett lakosokra is vonatkozik; persze önmagát senki sem figyelheti meg). Írjunk föl olyan IP feladatot, melynek segítségével megkapható a minimális beszerzési költség. **(9 pont)**

3. a) Adjuk meg az ábrán látható gráf egy minimális méretű elvágó élhalmazát (vágását) a Nagamochi–Ibaraki-algoritmus segítségével. Amikor egy lépés során több csúc közül is lehet választani, akkor mindig azt válasszuk, amelyik betűrendbe sorolva a legelső közülük. **(11 pont)**

b) Van-e olyan maxvissza sorrendje a csúcsoknak, melyben b az utolsó csúc?

(5 pont)



Nagyon figyeljünk oda a gráf ábrázolásának és az algoritmus lépéseinek pontos kivitelezésére, mert könnyű elrontani!

4. Legyen G egy olyan gráf, melynek összefüggőségi száma és élösszefüggőségi száma egyaránt 10. Vegyünk két példányt G -ből, és húzzunk be ezek közé három új élt (tehát mindegyik új élnek az egyik végpontja G egyik példányában van, a másik végpontja a másikban), és jelöljük a kapott gráfot G' -vel. Mi lehet G' összefüggőségi és élösszefüggőségi száma?

(Ez esetleg függhet attól, hogyan húztuk be az új éleket. Ha csak egy érték lehetséges, akkor határozzuk azt meg. Ha több is, akkor adjuk meg a kérdéses mennyiség legkisebb és legnagyobb lehetséges értékét (és indokoljuk is meg, hogy azok miért a legnagyobbak / legkisebbek), majd az esetleges köztes értékeket is vizsgáljuk meg, hogy azok közül melyik realizálható.) **(11 pont)**