

# Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

1. PótZH javítókulcs (2025.04.16. 18-20, Q-I)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számlási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

## Javított változat

1. a) Tekintsük a jobbra látható egyenlőtlenségrendszer, és az órán tanult Fourier–Motzkin-elimináció segítségével döntsük el, hogy megoldható-e. Ha igen, adjunk meg egy olyan megoldást, melyben  $w = 4$ . Ha nem, akkor adjunk erre a Farkas-lemmában szereplő bizonyítékot. (10 pont)

b) Milyen  $p \in \mathbb{R}$  számokra van olyan megoldása a rendszernek, melyre  $z = p$ ? (4 pont)

$$\begin{aligned}x - y + 2z + 4w &\leq 10 \\x - y + 5z + w &\geq -2 \\x + 2y - 4z - 2w &= -2 \\z - w &\leq 4\end{aligned}$$

Megoldás: a) Először is hozzuk sztenderd alakra (minden  $\geq$  egyenlőtlenséget  $\leq$  alakúra írunk át negatív szorzó segítségével): (1 pont)

$$\begin{aligned}x - y + 2z + 4w &\leq 10 \\-x + y - 5z - w &\leq 2 \\x + 2y - 4z - 2w &\leq -2 \\-x - 2y + 4z + 2w &\leq 2 \\z - w &\leq 4\end{aligned}$$

A következőekben a kibővített együtthatómátrixszal dolgozunk úgy, ahogy az órán tanultuk: sorra elimináljuk a változókat úgy, hogy az adott változót nemnulla együtthatóval tartalmazó sorokat alkalmas nemnegatív számmal szorozva elérjük, hogy az eliminálandó változó együtthatója  $\pm 1$  legyen, majd az összes, az adott változót  $+1$  együtthatóval tartalmazó sort összeadjuk az összes, az adott változót  $-1$  együtthatóval tartalmazó sorral, és az eredményül kapott sorokat, valamint az adott változót 0 együtthatóval tartalmazó sorokat írjuk az új mátrixba. Ezt az eljárást folytatjuk, míg az összes változót elimináltuk, vagy tilos sort kapunk (minden együttható 0, de a jobboldal negatív). A mintamegoldásban az  $x, y, z, w$  sorrendben elimináljuk a változókat.  $(0, \dots, 0|p)$  sor  $p \geq 0$ -ra triviális, elhagyható, ismétlődő sorok szintén. (4 pont)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & | & 10 \\ -1 & 1 & -5 & -1 & | & 2 \\ 1 & 2 & -4 & -2 & | & -2 \\ -1 & -2 & 4 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 3 & | & 12 \\ 0 & -3 & 6 & 6 & | & 12 \\ 0 & 3 & -9 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \quad (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 8)$$

Mivel nem kaptunk tilos sort, a tanultak szerint az egyenlőtlenségrendszer megoldható. (1 pont)

(A középső (4 pont) arra jár, ha valaki az eljárás lépéseit ismeri és sikerrel alkalmazni is tudja. Az előbbi kiderülhet szövegszerű megfogalmazásból, de annak híján az elvégzett lépésekből is; utóbbi a lépések

kivitelezéséből látható. Aki felidézi ugyan a vonatkozó elméletet, de egyáltalán nem demonstrálja, hogy alkalmazni is képes azt a feladatra, az **(0 pont)**-ot kap.)

A tanultak alapján úgy kaphatunk egy megoldást, ha a változók eliminálási sorrendjét megfordítva az adott változónak az eliminálását megelőző utolsó állapotnak megfelelően választunk megengedett értéket, majd ezt rögzítve haladunk tovább a következő változóra.

A feladat alapján  $w = 4$  adott. A  $z$  utolsó előfordulása az ötödik mátrixban van, a feltételek a  $w = 4$  helyettesítéssel  $0 \leq z \leq 0$ , tehát  $z = 0$  adódik. A harmadik mátrix alapján  $4 \leq y \leq 4$ , azaz  $y = 4$  adódik. Az első mátrix alapján  $-2 \leq x \leq -2$ , azaz  $x = -2$ . Így  $x = -2, y = 4, z = 0, w = 4$  egy jó megoldás. **(5 pont)**

**b)** Azt tanították, hogy az elimináció során kapott valamelyik új egyenletrendszernek van megoldása, akkor az eredetinek is. **(1 pont)**

Nézzük az ötödik mátrixot, azaz a  $-z + w \leq 4$  és  $z - w \leq 4$ , átfogalmazva a  $-4 \leq z - w = 4$  rendszert. Ennek persze van megoldása tetszőleges  $z = p \in \mathbb{R}$  esetén: ekkor  $z = p, w = 4 + p$  megoldása az ötödik rendszernek. **(2 pont)**

A fentebb felidézett ismeretek alapján ekkor az  $x$  és  $y$  változó értékei is megválaszthatók úgy, hogy az eredeti rendszer egy megoldását kapjuk, melyben  $z = p$ . Tehát minden  $p$ -re van megfelelő megoldás. **(1 pont)**

**2.** Az oldalt látható mátrix az  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  és  $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$  csúcsosztályokkal rendelkező, élsúlyozott, teljes páros gráf élsúlyait tartalmazza: az  $A_i B_j$  él súlya az  $A_i$  indexű sor és a  $B_j$  indexű oszlop metszetében álló szám. Keressünk a gráfban minimális súlyú súlyozott lefogást a magyar módszer segítségével. **(10 pont)**

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 5     | 9     | 4     | 6     |
| $A_2$ | 2     | 8     | 5     | 2     |
| $A_3$ | 2     | 8     | 3     | 3     |
| $A_4$ | 4     | 9     | 6     | 4     |

*Megoldás:* A magyar módszer lépéseit követve egy lehetséges lefutása során kapott súlyozott lefogások, illetve egy teljes párosítás bekeretezve: **(8 pont)**

|       | $B_1$    | $B_2$    | $B_3$    | $B_4$    |       |
|-------|----------|----------|----------|----------|-------|
| $A_1$ | 5        | 9        | 4        | <u>6</u> | 0 1 2 |
| $A_2$ | 2        | 8        | <u>5</u> | 2        | 0 0 0 |
| $A_3$ | 2        | <u>8</u> | 3        | 3        | 0 0 0 |
| $A_4$ | <u>4</u> | 9        | 6        | 4        | 0 1 1 |
|       | 5        | 9        | 6        | 6        |       |
|       | 4        | 8        | 5        | 5        |       |
|       | 3        | 8        | 5        | 4        |       |

A lefogás súlya 23, a teljes párosításé szintén 23, és mivel előbbi sosem lehet kisebb az utóbbinál, a talált súlyozott lefogás a lehető legkisebb összsúlyú. **(2 pont)**

**3. a)** A Zabhegyező Bt. kétféle zabot ( $Z_1$  és  $Z_2$ ) hegyez. A  $Z_1$  zab kihegyezve kévéként 5 fabatka hasznot hoz, a  $Z_2$  zab 3 fabatkát. A technológiai adottságok a jobbra olvasható feltételeket róják a naponta kihegyezhető kévék  $x$  és  $y$  számára ( $x$  jelöli a  $Z_1$ ,  $y$  a  $Z_2$  zabból hegyezendő kévék napi mennyiségét). Határozzuk meg, melyik fajta zabból hány kévét kell naponta kihegyezni ahhoz, hogy maximalizáljuk a bevételt. **(10 pont)**

$$\begin{aligned} 4x + 3y &\leq 132 \\ 2x + y &\leq 58 \\ 3x + 2y &\leq 94 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

**b)** A KKV-k termelékenységének fokozásáért felelős kormánybiztos kvótát írt elő a Zabhegyező Bt. által naponta kihegyezendő kévék minimális összesített számára, melyet  $p$  kéve per napban állapított meg. A Zabhegyező Bt. elemzői szerint az intézkedés hatása a cégre a következő: alkalmas  $p_1 < p_2$  értékekre, ha  $p \leq p_1$ , akkor a cég nem változtat a (korábban megállapított) termelési stratégiáján; ha  $p_1 < p \leq p_2$ , akkor a Bt. bevétele csökkenni fog, ha pedig  $p > p_2$ , akkor be kell zárni a céget, mert nem tudja teljesíteni a kvótát. Igazoljuk ezt az állítást, és határozzuk meg  $p_1$  és  $p_2$  értékét. **(4 pont)**

*Megoldás:* **a)** A maximalizálandó mennyiség  $5x + 3y$ . **(1 pont)**

Számoljuk ki a feltételek határegyeneseinek metszéspontjait.

|                 | $y = 0$  | $4x + 3y = 132$ | $2x + y = 58$ | $3x + 2y = 94$          |
|-----------------|----------|-----------------|---------------|-------------------------|
| $x = 0$         | $(0, 0)$ | $(0, 44)$       | $(0, 58)$     | $(0, 47)$               |
| $y = 0$         |          | $(33, 0)$       | $(29, 0)$     | $(31 + \frac{1}{3}, 0)$ |
| $4x + 3y = 132$ |          |                 | $(21, 16)$    | $(18, 20)$              |
| $2x + y = 58$   |          |                 |               | $(22, 14)$              |

A feltételek ellenőrzésével adódik, hogy a megoldások  $P$  tartományának csúcsai:  $(0, 0)$ ,  $(0, 44)$ ,  $(18, 20)$ ,  $(22, 14)$ ,  $(29, 0)$ . **(6 pont)**

A tanultak szerint a célfüggvény felveszi az optimális értékét valamelyik csúcsban, így elég ezekre meghatározni a célfüggvény értékét, és kiválasztani a maximálisat. **(2 pont)**

| csúcs     | $(0, 0)$ | $(0, 44)$ | $(18, 20)$ | $(22, 14)$ | $(29, 0)$ |
|-----------|----------|-----------|------------|------------|-----------|
| $5x + 3y$ | 0        | 132       | 150        | 152        | 145       |

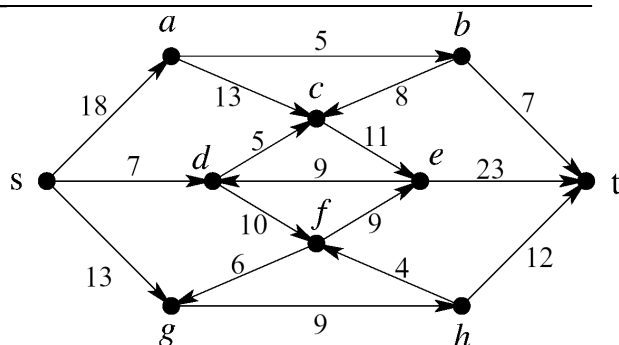
A maximális napi bevétel tehát 152 fabatka. **(1 pont)**

**b)** A napi kvóta az  $x + y \geq p$  feltétellel egészíti ki a rendszert. A jelenlegi (optimális) megoldásra  $x + y = 22 + 14 = 36$ , tehát ha  $p \leq 36$ , nincs szükség módosításra (és nem is lenne hasznos). **(1 pont)**

Ha  $p > 36$ , akkor muszáj más  $(x, y)$  érték után néznünk, az viszont nem érheti el a korábbi bevételi szintet (egyetlen optimális megoldás volt az eredeti feladatra), tehát a bevétel csökken. **(1 pont)**

Az  $x + y$  függvény (mint célfüggvény) maximális értéke a  $P$  megengedett tartományon szintén valamelyik csúcsban vétetik fel, könnyen kiszámolhatóan a  $(0, 44)$  csúcsban. Ennek okán, ha  $p > 44$ , akkor nincs olyan megoldás, ami teljesíti a kvótát, a cég lehúzhatja a rolót. Tehát az elemzők helyzetértékelése helytálló, és  $p_1 = 36$ ,  $p_2 = 44$ . **(2 pont)**

**4.** A jobbra látható ábra azt reprezentálja, hogy a drogcsempészek az  $s$  forrásországból a  $t$  célországba az  $\{a, \dots, h\}$  tranzitországokon keresztül milyen útvonalakon szállítják a portékájukat. Az élekre írt számok a két adott ország viszonylatában tevékenykedő csempészbandák számát jelölik. Határozzuk meg, hogy legkevesebb hány csempészbandát kellene felszámolni ahhoz, hogy ne lehessen drogot juttatni  $s$ -ből  $t$ -be. **(12 pont)**



**Megoldás:** Az összes  $st$  csempésztútvonal felszámolásához egy  $st$ -vágásból kilépő éleken kell felszámolni a bandákat. Ha az élekre írt számokat kapacitásként értelmezzük, akkor ez éppen a vágás kapacitása. A kérdés tehát valójában az, hogy az adott hálózatban mekkora a minimális  $st$ -vágás kapacitása. **(2 pont)**

A tanult MFMC algoritmust alkalmazzuk. Az  $s, a, b, t(+5)$ ,  $s, a, c, e, t(+11)$ ,  $s, d, f, e, t(+7)$  és  $s, g, h, t(+9)$  útvonalakon a zárójelben jelzett értékekkel növelve a (kezdetben minden élen 0) folyamot egy 32 nagyságú folyamot kapunk. **(4 pont)**

Erre a folyamra nézve nincs javító út: az  $s$ -ből a megfelelő segédgráfban elérhető csúcsok halmaza  $X = \{s, a, c, g\}$ , ennek a vágásnak a kapacitása a kilépő élek ( $sd, ab, ce, gh$ ) kapacitásösszege, azaz  $7 + 5 + 11 + 9 = 32$ . **(4 pont)**

A tanultak alapján semelyik vágás kapacitása nem lehet kisebb semelyik folyam nagyságánál, és mivel van 32 nagyságú folyam, a talált  $X$  vágás minimális. Így legalább 32 csempészbandát kell felszámolni. **(2 pont)**

(A korábban közzéadott javítókulcsban a FM elimináció utolsó előtti mátrixának utolsó sorának jobb oldala tévesen  $-4$  volt, így az utolsó mátrix is más; a magyar módszeres feladatban a kiindulási súlyozott lefogásban a harmadik oszlop súlyaként 7 szerepelt, pedig az helyesen 6; illetve az LP megoldásában a b) részben  $x + y$  maximuma könnyen láthatóan nem a  $(18, 20)$ , hanem a  $(0, 44)$  pontban vétetik föl, így  $p_2 = 44$ .)