

Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA09)

1. PótZH (2025.04.16. 18-20, Q-I)

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Kérjük, minden résztvevő a **nevét**, a **Neptun kódját** és a **gyakorlatvezetőjének nevét** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában olvashatóan és helyesen tüntesse fel, illetve egy személyazonosságát igazoló fényképes okmányt készítsen elő. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata nem megengedett (számológép sem). Mobiltelefon még kikapcsolt állapotban sem lehet a hallgató keze ügyében. Az indoklás nélküli eredményközlést nem értékeljük. Megindokolt részeredményekért részpontszám kapható.

1. a) Tekintsük a jobbra látható egyenlőtlenségrendszert, és az órán tanult Fourier–Motzkin-elimináció segítségével döntsük el, hogy megoldható-e. Ha igen, adjunk meg egy olyan megoldást, melyben $w = 4$. Ha nem, akkor adjunk erre a Farkas-lemmában szereplő bizonyítékot. (10 pont)

$$x - y + 2z + 4w \leq 10$$

$$x - y + 5z + w \geq -2$$

$$x + 2y - 4z - 2w = -2$$

$$z - w \leq 4$$

b) Milyen $p \in \mathbb{R}$ számokra van olyan megoldása a rendszernek, melyre $z = p$? (4 pont)

2. Az oldalt látható mátrix az $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ és $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ csúcsosztályokkal rendelkező, élsúlyozott, teljes páros gráf élsúlyait tartalmazza: az $A_i B_j$ él súlya az A_i indexű sor és a B_j indexű oszlop metszetében álló szám. Keressünk a gráfban minimális súlyú súlyozott lefogást a magyar módszer segítségével. (10 pont)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	9	4	6
A_2	2	8	5	2
A_3	2	8	3	3
A_4	4	9	6	4

3. a) A Zabhegyező Bt. kétféle zabot (Z_1 és Z_2) hegyez. A Z_1 zab kihegyezve kévéneként 5 fabatka hasznot hoz, a Z_2 zab 3 fabatkát. A technológiai adottságok a jobbra olvasható feltételeket róják a naponta kihegyezhető kévék x és y számára (x jelöli a Z_1 , y a Z_2 zabból hegyezendő kévék napi mennyiségét). Határozzuk meg, melyik fajta zabból hány kévét kell naponta kihegyezni ahhoz, hogy maximalizáljuk a bevételt. (10 pont)

$$4x + 3y \leq 132$$

$$2x + y \leq 58$$

$$3x + 2y \leq 94$$

$$x, y \geq 0$$

b) A KKV-k termelékenységének fokozásáért felelős kormánybiztos kvótát írt elő a Zabhegyező Bt. által naponta kihegyezendő kévék minimális összesített számára, melyet p kéve per napban állapított meg. A Zabhegyező Bt. elemzői szerint az intézkedés hatása a cégre a következő: alkalmas $p_1 < p_2$ értékekre, ha $p \leq p_1$, akkor a cég nem változtat a (korábban megállapított) termelési stratégiáján; ha $p_1 < p \leq p_2$, akkor a Bt. bevétele csökkenni fog, ha pedig $p > p_2$, akkor be kell zárni a céget, mert nem tudja teljesíteni a kvótát. Igazoljuk ezt az állítást, és határozzuk meg p_1 és p_2 értékét. (4 pont)

4. A jobbra látható ábra azt reprezentálja, hogy a drogcsempészek az s forrásországból a t célországba az $\{a, \dots, h\}$ tranzitországokon keresztül milyen útvonalakon szállítják a portékájukat. Az élekre írt számok a két adott ország viszonylatában tevékenykedő csempészbandák számát jelölik. Határozzuk meg, hogy legkevesebb hány csempészbandát kellene felszámolni ahhoz, hogy ne lehessen drogot juttatni s -ből t -be. (12 pont)

