

Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

11. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók. Definíció. A $G = (V, E)$ irányítatlan gráf *elvágó éle* (*elvágó pontja*) a G olyan e éle (olyan v pontja), amelyre $(G - e)$ -nek ($(G - v)$ -nek) több komponense van, mint G -nek. A G gráf *2-összefüggő*, ha G összefüggő és G -nek nincs elvágó éle. A G gráf *2-összefüggő*, ha G összefüggő, legalább 3 csúcsa van és G -nek nincs elvágó pontja. A *blokk* olyan összefüggő gráf, aminek nincs elvágó pontja (azaz vagy K_1 , vagy K_2 , vagy egy 2-összefüggő gráf.) A G *maxblokkja* a G egy tartalmazásra nézve maximális blokk részgráfja (azaz olyan részgráf, ami blokk, de nincs benne másik blokk részgráfban), a G *2-komponense* pedig a G tartalmazásra nézve maximális 2-élösszefüggő részgráfja.

Megfigyelés. Tetszőleges G véges, irányítatlan gráf esetén

(1) A G 2-komponensei a G elvágó éleinek elhagyásával kapott gráf komponensei.

(2) A 2-komponensek faszzerűen csatlakoznak egymáshoz G elvágó élei mentén. (Minden 2-komponenst egy-egy csúcsba összevonva G -ből egy körmentes gráfot (erdőt) kapunk.)

(3) A G maximális blokkjai faszzerűen csatlakoznak egymáshoz. (Azaz a $T_2(G)$ gráf erdő, ahol $T_2(G)$ csúcsai a G blokkjai és G elvágó pontjai, élei pedig az illeszkedő blokk-elvágó pont párok.)

Definíció. A G gráf K 2-komponense *levél*, ha K a G -nek pontosan egy elvágó éléhez csatlakozik. A K 2-komponens *izolált*, ha nem csatlakozik hozzá G egyetlen elvágó éle sem, azaz ha K a G egy olyan komponense, ami 2-élösszefüggő.

Definíció. A G gráf *levélblokkja* a G olyan B blokkja, amely G -nek pontosan egy elvágó pontját tartalmazza. A B blokk *izolált*, ha B nem tartalmazza G egyetlen elvágó pontját sem, más szóval a B blokk a G egy komponense.

Tétel. A G gráfba a 2-élösszefüggőség eléréséhez behúzendó élek minimális száma $\left\lceil \frac{\ell(G) + 2 \cdot \ell'(G)}{2} \right\rceil$, ahol $\ell(G)$ ill. $\ell'(G)$ a G levél ill. izolált 2-komponenseinek számát jelöli.

Tétel. A G gráfba a 2-összefüggőség eléréséhez (azaz G blokkjainak összeolvasztásához) behúzendó élek minimális száma $\max \left\{ b(G) - 1, \left\lceil \frac{m(G) + 2 \cdot m'(G)}{2} \right\rceil \right\}$, ahol $m(G)$ ill. $m'(G)$ a G levél ill. izolált blokkjai száma, $b(G)$ pedig a G -ből egy csúcs elhagyásával keletkező gráf komponenseinek maximális száma.

Tétel. Ha G 2-élösszefüggő, akkor G -nek van fülfelbontása, azaz G megkapható egy *csúcsból* fülek egyenkénti hozzáadásával. Fül alatt itt egy olyan utat értünk, amelynek mindkét végpontja az eddig felépített gráfban van, a többi csúcsa pedig nem szerepel az addig felépített gráfban. A *fül két végpontja lehet azonos*. Megfordítva is igaz: ha egy gráfnak van ilyen fülfelbontása, akkor 2-élösszefüggő.

Tétel. Ha G 2-összefüggő, akkor G -nek van fülfelbontása nyílt fülekkel, azaz G megkapható egy *körből* fülek egyenkénti hozzáadásával. Fül alatt itt egy olyan utat értünk, amelynek két végpontja az eddig felépített gráfon van, a többi csúcsa pedig nem szerepel az addig felépített gráfban, és a *fül két végpontja nem lehet azonos*. Megfordítva is igaz: ha egy gráfnak van ilyen fülfelbontása, akkor 2-összefüggő.

Gyakorlatok

1. Legyenek a G gráf csúcsai a 42-nél kisebb (pozitív) prímszámok, és pontosan akkor fusson él két különböző, u és v csúcs között, ha $u - v$ osztható öttel, vagy $u + v$ kétjegyű prímszám.

a) Rajzoljuk föl G -t.

b) Rajzoljuk föl a G 2-komponenseiből és elvágó éleiből álló erdőt. Határozzuk meg, legkevesebb hány él behúzásával tehető G 2-élösszefüggővé, és mutassunk is példát megfelelő élek behúzására.

c) Rajzoljuk föl a $T_2(G)$ gráfot. Határozzuk meg, legkevesebb hány él behúzásával tehető G 2-összefüggővé, és mutassunk is példát megfelelő élek behúzására.

2. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfnak van olyan 2-komponense, amely G minden elvágó élének tartalmazza valamelyik végpontját. Hogyan függ a G 2-komponenseinek számától azon élek minimális száma, amelyeket behúзва G -be a kapott gráf 2-élösszefüggővé válik?

3. Tegyük fel, hogy G olyan összefüggő gráf, melynek 11 maxblokkja és 6 elvágó pontja van. Igazoljuk, hogy 5 él behúzásával elérhető, hogy G 2-szeresen (pont)összefüggő legyen.

4. Igazoljuk Robbins tételét: egy G irányítatlan gráf éleinek pontosan akkor van erősen összefüggő irányítása, ha G 2-élösszefüggő. (Egy D irányított gráf akkor erősen összefüggő, ha bármely u, v csúcsra létezik D -ben irányított uv -út.)

5. Igazoljuk, hogy ha G -nek van fülfelbontása, akkor G bármely két fülfelbontása ugyanannyi fület tartalmaz.

6. Tegyük fel, hogy a G gráf 2-élőf és nincs 2-fokú csúcsa. Bizonyítsuk be, hogy van G -nek olyan e éle, amire a $G - e$ gráf is 2-élőf. Igaz-e hasonló állítás a 2-élőf helyett 2-őf tulajdonsággal?

7. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfnak van olyan maxblokkja, amely tartalmazza G minden elvágó pontját. Tervezzünk olyan hatékony algoritmust, amely az iménti inputhoz megtalál egy olyan minimális méretű élhalmazt, melynek kiépítésétől a kapott gráf 2-szeresen (pont)összefüggővé válik.

- 8.** Tegyük fel, hogy a G gráfnak olyan fülfelbontása van, amelyben minden fül páratlan sok élt tartalmaz. Mutassuk meg, hogy G minden v csúcsához található G egy olyan M párosítása (azaz közös végpont nélküli éleinek halmaza), hogy a v csúcs kivételével G minden csúcsára illeszkedik M -beli él.
- 9.** Adjunk meg olyan eljárást, ami tetszőleges irányítatlan G input gráf esetén meghatározza a legkisebb olyan k pozitív egész számot, amire hozzáadható G -hez k él úgy, hogy a kapott gráf 2-szeresen élösszefüggő legyen, és a hozzáadott élek utat alkossanak.
- 10.** Igazoljuk, hogy minden erősen összefüggő G gráf előállítható egy irányított körből kiindulva irányított fülek egymás utáni hozzávételével.
- 11.** Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan fülfelbontása, amelyikben az első fül egy C_3 , minden további fül pedig 2 élt tartalmaz. Bizonyítsuk be, hogy G minden éle kiszínezhető a piros, fehér vagy zöld színek valamelyikére úgy, hogy egyetlen él kap fehér színt, továbbá a piros élek a fehér éllel együtt a G egy feszítőfáját alkossák, valamint a zöld élek a fehér éllel együtt szintén a G egy feszítőfáját alkossák.