Kombinatorikus optimalizálás 2024. II. félév

8. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (`heger@cs.bme.hu`)

Tudnivalók

Definíció. *Egészprogramozási feladatnak (IP)* egy olyan LP vagy DLP feladatot hívunk, ahol további megkötés, hogy a változóknak egész értéket kellfelvenniük, sztenderd alakban $\max cx\colon Ax \le b, x \in \mathbb{Z}^n$. Egy IP feladat **LP relaxáltját** úgy kapjuk, ha az egészértékűségi feltételeket elhagyjuk az IP-ből (azaz megengedünk megoldásokat $x \in \mathbb{R}^n$-ből is). Ha LP és DLP duális feladatpár, akkor az x és y-beli változózók egészértékűségét megkívánva kapjuk az IP és DIP egészprogramozási feladatokat.

Megfigyelés. Ha LP egy $\max cx$, DLP pedig egy $\min yb$ típusú feladat és mindkettőnek van megoldása, akkor a megfelelő egészprogramozási feladatokra teljesül, hogy $\max_{IP} cx \le \max_{LP} cx = \min_{DLP} yb \le \min_{DIP} yb$.

Cél: olyan feltétel, ami biztosítja, hogy a fenti egyenlőtlenségláncban végig egyenlőség álljon.

Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix *teljesen unimoduláris (TU)*, ha A bármely négyzetes részmátrixának determinánsa 0 vagy ± 1.

Megfigyelés. TU mátrix minden eleme 0 vagy ± 1.

Állítás. Ha A TU mátrix, akkor TU marad, ha (1) transzponáljuk, (2) valamely sorát/oszlopát (-1)-gyel végigszorozzuk, (3) valamely sorát/oszlopát megismételjük/töröljük, (4) két sorát/oszlopát felcseréljük, (5) A-t egy 1 db 1-esen kívül csupa 0-kat tartalmazó sorral/oszloppal bővítjük.

Tétel. Tfh A TU mátrix és a b vektor koordinátái egészek. Ekkor a $\max cx\colon Ax \le b, x \in \mathbb{Z}^n$ IP feladatra és LP relaxáltjára $\max_{IP} cx = \max_{LP} cx$ teljesül. Ha pedig A TU és c egész, akkor a DIP-re és relaxáltjára (DLP) teljesül, hogy $\min_{DLP} yb = \min_{DIP} yb$. Szavakban: TU együtthatómátrix és egész konstansok (ill. célfvegyütthatók) esetén ha az LP-nek (ill. a DLP-nek) van optimuma, akkor az optimumérték egész változókkal megadható megoldáson is felvétetik, vagyis az egészértékűségi megszorítás nem ront az optimum értékén.

Definíció. A $G = (V,E)$ irányított gráf $B(G)$ *illeszkedési mátrixának* (avagy incidenciamátrixának) sorai V-nek, oszlopai E-nek felelnek meg, és a v csúcs és e él által meghatározott (v,e) pozícióban 1 áll, ha e a v-ből kilép, -1, ha belép, és 0, ha v nem végpontja e-nek. Irányítatlan gráf illeszkedési mátrixa hasonló: ha v végpontja e-nek, akkor 1 áll, ha nem akkor 0.

Állítás. Ha G irányított gráf, akkor a $B(G)$ incidenciamátrixa TU tulajdonságú.

Következmény. Ha G páros gráf, akkor a $B(G)$ incidenciamátrix TU.

Definíció. Legyen $G = (V,E)$ multigráf. Ekkor $u,v \in V$ csúcsaira $\lambda(u,v)$ jelöli az u-ból v-be vezető, páronként éldiszjunkt utak max számát. Menger tétele miatt ez egyenlő az u-t és v-t szeparáló élhalmazok minimális méretével, azaz a legkisebb olyan X élhalmaz mérete, melyre u és v a $G - X$ különböző összefüggőségi komponenseiben van. Hasonlóan, $\kappa(u,v)$ pedig az u-ból v-be vezető páronként belsőleg pontdiszjunkt utak maximális számát jelöli. Ha u és v nem szomszédosak, Menger tétele szerint ez egyenlő az u-t és v-t szeparáló csúcshalmazok minimális méretével, azaz legkisebb olyan X csúcshalmaz mérete, melyre u és v a $G - X$ különböző összefüggőségi komponenseiben van (ilyenkor $u,v \notin X$ szükségszerű).

Definíció. G k-szorosan élösszefüggő, ha bármely legfeljebb $k-1$ élét elhagvva összefüggő marad (ha G nem összefüggő, akkor 0-élösszefüggő). A G *élösszefüggőségi száma* $\lambda(G) := \min\{\lambda(u,v) : u,v \in V\}$. Ez megegyezik azon élek minimális számával, amelyek elhagyása után G már nem marad összefüggő; másképpen szólva $\lambda(G)$ az a legnagyobb k, melyre G k-élösszefüggő.

Definíció. G k-szorosan (pont)összefüggő, ha bármely legfeljebb $k-1$ csúcsát elhagvva összefüggő marad, és $|V(G)| \ge k+1$ (ha G nem összefüggő, akkor 0-élösszefüggő). A G *(pont)összefüggőségi száma* $\kappa(G) := \min\{\kappa(u,v) : u,v \in V\}$; másképpen szólva $\kappa(G)$ az a legnagyobb k, melyre G k-(pont)összefüggő. Ha G-ben vannak nem szomszédos csúcsok, akkor ez megegyezik azon csúcsok minimális számával, amelyek elhagyása után G már nem marad összefüggő, továbbá $\kappa(G) := \min\{\kappa(u,v) : u,v \in V, uv \notin E(G)\}$.

Definíció. A G *(él)vágása* alatt a G csúcsainak egy valódi X részhamazából induló élek $E(X)$ halmazát értjük. A vágást (ha nem okoz félreértést) azonosíthatjuk az azt meghatározó X ponthalmazzal. A G *minimális vágása* a G olyan vágását jelenti, amely a lehető legkevesebb élt tartalmazza.

Megfigyelés. Adott u,v-re egy folyamalgoritmussal meghatározható $\lambda(u,v)$, ezért $\binom{n}{2}$ folyamalgoritmussal található minimális vágás. (Sőt: $n-1$ is elég, hiszen u rögzíthető.)

Megfigyelés. Legyen u és v a G multigráf két különböző csúcsa. Ha G-nek van az u-t és v-t szeparáló minimális vágása, akkor $\lambda(G) = \lambda(u,v)$. Ha nincs ilyen minimális vágása G-nek, akkor G minimális vágásai megegyeznek az u és v csúcsok összeragasztásával (összeolvastásával) képzett G/uv gráf minimális vágásaival, azaz $\lambda(G) = \lambda(G/uv)$.

Definíció. A G multigráf *maxvissza sorrendje* a G csúcsainak olyan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendje, amelyre minden $1 \le i \le n-1$ esetén a $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ halmazba a v_i csúcsból legalább annyi él megy, mint bármely v_j-ből, ha $j > i$. Azaz a soron következő v_i csúcs mindig a korábbi csúcsok halmazához legtöbb éllel kapcsolódó csúcsok egyike.

Lemma. Ha $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a G maxvissza sorrendje, akkor $\lambda(v_n, v_{n-1}) = d(v_n)$, azaz a $\{v_n\}$ minimális élszámú olyan vágást határoz meg, ami v_n-et és v_{n-1}-et szeparálja.

Nagamochi-Ibaraki-algoritmus

Input: $G = (V, E)$ multigráf, Output: G egy X minimális vágása.

I. Meghatározzuk G egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maxvissza sorrendjét.

II. Felírjuk a v_n-ből kiinduló élek halmazát (minvágásjelölt).

III. Ha több mint két csúcs van, összeragasztjuk a v_n és v_{n-1} csúcsokat. GoTo I.

IV. Ha már csak két csúcs van, akkor az $n-1$ feljegyzett minvágásjelöltből kiválasztjuk az egyik legkisebbet. Ez egy minvágás lesz G-ben, mérete G élösszefüggőségi száma. (Vegyük észre: az összeragasztások miatt a minvágásjelöltek az eredeti G-ben nem feltétlenül egy csúcsból, hanem egy csúcshalmazból kilépő élek halmazai.)

Gyakorlatok

1. Egy $G = (V, E)$ gráf 2-*faktora* alatt az E egy olyan F részhalmazát értjük, amelyre G minden csúcsából pontosan két F-beli él indul. Tegyük fel, hogy G páros gráf és $c : E \to \mathbb{R}$ adott súlyfüggvény. Fogalmazzuk meg a maximális súlyú 2-faktor keresésének problémáját IP feladatként. Igaz-e, hogy a megfelelő LP feladatnak mindig van egész optimuma, azaz az IP optimuma egyúttal optimuma az LP-nek is? Írjuk fel az LP duálisát.

2. A piréz labdarúgó bajnokságban minden csapat minden másik csapattal egyszer játszik. Tegyük fel továbbá, hogy a bajnokság végeztével sikerült a csapatokat úgy jutalmazni, hogy ha az i csapat legyőzte a j csapatot, akkor a $p(i) - p(j)$ különbség $10^6 \cdot a(i, j)$ és $10^6 \cdot b(i, j)$ PP (piréz peták) közé essék, ahol $p(v)$ a v csapat jutalmát jelöli, valamint $a(i, j) \leq b(i, j)$ egész számok.
Igaz-e, hogy a jutalmazás megvalósítható ekkor úgy is, hogy a fenti feltételek továbbra is teljesüljenek, ám minden csapat egymillió PP többszörösét kapja, ráadásul a szétosztott jutalom összege ne növekedjék ettől?
(Célszerűnek látszik felírni egy, a feladathoz kapcsolódó LP problémát.)

3. a) Van-e olyan TU mátrixszal és egész jobboldalakkal felírt, megoldható IP probléma, melyre a DLP (duális relaxált) feladatnak van megoldása, de nincs egészértékű megoldása?
b) Van-e olyan TU mátrixszal és egész jobboldalakkal felírt, megoldható IP probléma, melyre a DLP (duális relaxált) feladatnak van egészértékű megoldása, de az optimumot nem veszi fel egészértékű megoldáson?

4. Vezessük le Egerváry tételét (páros gráfok max súlyú teljes párosításairól és minimális összsúlyú súlyozott lefogásairól) az LP dualitástételből és a TU mátrixokról tanultakból.

5. Mutassuk meg, hogy ha A TU mátrix, akkor a tanult ötféle művelet eredményeképpen valóban TU mátrixot kapunk.

6. a) Mutassuk meg, hogy ha G k-szorosan élösszefüggő (azaz $\lambda(G) \geq k$), akkor G-ben minden csúcs foka legalább k.
b) Mutassunk olyan gráfot, ahol minden csúcs foka legalább k, de a gráf nem k-szorosan élösszefüggő.

7. Legyen F egy legalább két pontú fa.
a) Mennyi $\lambda(F)$?
b) Legkevesebb hány él hozzáadásával lehet elérni, hogy megnőjön az elösszefüggőségi szám?

8. Legyen G egy körmentes gráf.
a) Legkevesebb hány él behúzásával érhető el, hogy összefüggő legyen?
b) És legkevesebb hány él behúzásával érhető el, hogy kétszeresen összefüggő legyen?

9. Legyenek a G gráf csúcsai a 8×8-as sakktábla mezői, és pontosan akkor kössön össze él két csúcsot, ha a megfelelő mezők élszomszédosak.
a) Határozzuk meg $\lambda(G)$ értékét.
b) Mennyi $\lambda(A1, H8)$, $\lambda(A2, H7)$, $\lambda(B4, H4)$?
c) Legkevesebb hány él hozzáadásával lehet elérni, hogy $\lambda(G)$ eggyel megnőjön?

10. a) Adjunk hatékony eljárást egy irányítatlan gráfban tetszőeges $u \neq v$ csúcsok esetén a $\lambda(u, v)$ meghatározására.
b) Adjunk hatékony eljárást irányítatlan G gráf esetén $\lambda(G)$ meghatározására.

11. Az MFMC algorimtus segítségével adjunk eljárást egy G gráfban $\kappa(u, v)$, illetve $\kappa(G)$ meghatározására.

12. Keressünk minimális vágást a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével egy legalább 6-pontú (nem feltétlenül egyszerű) gráfban.

13. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges $G = (V, E)$ gráfban találhatók olyan (u_1, w_1) és (u_2, w_2) pontpárok, amikre $w_1 \neq w_2$, valamint $\lambda(u_1, w_1) = d(w_1)$ és $\lambda(u_2, w_2) = d(w_2)$ teljesül.

14. Tegyük fel, hogy amikor a Nagamochi-Ibaraki algoritmus segítségével határozzuk meg a G multigráf élösszefüg-

gőségét, akkor a max-vissza sorrendben utolsó csúcsok fokszámai rendre az alábbiak: 7, 9, 6, 4, 7, 5, 4, 8, 4, 7, 9. Határozzuk meg G élösszefüggőségi számát, $\lambda(G)$-t. Igaz-e, hogy G-nek bizonyosan van olyan legfeljebb 4 elemű X ponthalmaza, hogy X és a komplementere között futó élek száma megegyezik $\lambda(G)$-vel?