

Kombinatorikus optimalizálás 2025. II. félév

9. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Definíció: Egy LP feladat *általánosabb sztenderd alakú*, ha a feltételrendszere egyenlőségekből, egyenlőtlenségekből és nemnegativitási feltételekből áll, továbbá minimalizálás esetén minden egyenlőtlenség $\geq$, maximalizáláskor pedig $\leq$ alakú (ide nem értve a nemnegativitási feltételeket).

Definíció: Az LP-vel jelölt $\max\{cx : Ax \leq b\}$ primál feladat *duálisa* a DLP-vel jelölt $\min\{yb : y \geq 0, yA = c\}$ lineáris programozási feladat.

Dualitástétel. Tetszőleges $\max cx$ típusú LP feladatra és $\min yb$ típusú DLP duálisára az alábbi lehetőségek közül pontosan egy teljesül.

- (1) Sem az LP, sem a DLP nem megoldható.
- (2) Az LP nem megoldható, a DLP igen, és a DLP megoldásain az yb célfüggvényérték alulról nem korlátos.
- (3) A DLP nem megoldható az LP igen, és az LP megoldásain a cx célfüggvényérték felülről nem korlátos.
- (4) Az LP és a DLP is megoldható, és az optimumértékek azonosak:

$$\max\{cx : x \text{ az LP megoldása}\} = \min\{yb : y \text{ a DLP megoldása}\}.$$

Következmény: (1) Ha x és y a fenti LP ill DLP megoldásai, akkor $cx \leq yb$.

(2) (Optimalitási kritérium) Ha a fenti LP ill. DLP feladatok x ill. y megoldásaira $cx = yb$ teljesül, akkor x a primál LP, y pedig a duál DLP optimális megoldásai.

Megjegyzés: LP/DLP feladat duálisa az alábbi ökölszabályok segítségével képezhető.

- (0) Ne szégyelljünk számárvezetőt használni.
- (1) A feladatokat általánosabb sztenderd alakban írjuk fel.
- (2) Az LP, ill. DLP egyikében maximalizálunk, a másikban minimalizálunk.
- (3) Duál változóhoz primál feltételek, duál feltételekhez primál változók tartoznak, és viszont.
- (4) Nemnegatív változóhoz egyenlőtlenség, előjelkötetlen változóhoz egyenlőség tartozik.
- (5) A primál célfv együtthatói a duál konstansok, a duál célfv együtthatói pedig a primál konstansok.
- (6) Az ezen szabályokkal képzett primál/duál feladat is sztenderd alakú.

Egészértékű / vegyes lineáris program (Integer / Mixed Linear Program, IP / MIP): egy szokásos lineáris program (változók, lineáris feltételek (egyenletek és egyenlőségek), lineáris célfüggvény), de azt is előírjuk, hogy minden / néhány változó csak egész értéket vehet föl.

Egy egészértékűségi feltétel *relaxációja* az, hogy eltekintünk tőle, és a feladatot úgy oldjuk meg, hogy a relaxált változó valós értéket is felvehet. Egy IP vagy MIP **LP-relaxáltja** az összes egészértékűségi feltétel relaxálásával kapott LP.

Egy LIP/MIP megoldásai természetesen megoldásai a (részben) relaxált változatnak is, viszont a relaxált LP megoldáshalmaza lehet szigorúan bővebb is, mint az eredetie. Emiatt a relaxált program célfüggvényértéke általában csak becslést ad az eredetire (ha maximalizálunk, akkor a relaxált LP optima esetleg nagyobb az eredetiénél; ha minimalizálunk, akkor esetleg kisebb). Tehát, ha az IP: $\max cx : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n$, akkor a relaxált LP: $\max cx : Ax \leq b$, ennek duálisa DLP: $\min yb : y \geq 0, yB = c$, és ennek egészértékű megszorítása (duális IP) DIP: $\min yb : y \geq 0, yB = c, y \in \mathbb{Z}^l$. Ekkor a célfüggvények optimumára (ha léteznek megoldások): $\max_{IP} cx \leq \max_{LP} cx = \min_{DLP} yb \leq \min_{DIP} yb$. Gyakorta megesik, hogy $\max_{IP} cx < \max_{LP} cx$. Ha olyan szerencsénk van, hogy nem ez a helyzet, akkor egy IP megoldás optimalitását igazolhatjuk a DLP egy optimális megoldásának prezentálásával (az IP és DLP célfüggvényértékek ekkor egybeesnek, igazolva egymás optimalitását).

Gyakorlatok

1. Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát!

$$\begin{aligned} &\min\{x_1 - 2x_2 + x_4\} \\ &\text{ha} \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ &x_1 + x_3 + 5x_4 = 1 \\ &x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Megoldás: Először átírjuk sztenderd alakba a feladatot. Mivel minimalizálunk, ezért csak $\geq$ ill. $=$ típusú feltételeink lehetnek, azaz az utolsó feltétel $-x_2 \geq 0$ alakot ölt. Ezek után számravezetőt készítünk. Mivel az LP-ben minimalizálunk, a DLP-ben maximalizálni kell, tehát a lineáris feltételeink $=$ és $\leq$ típusúak lehetnek.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
$y_1 \geq 0$	1	2	1	1	≥ 1
y_2	1	0	1	5	$= 1$
$y_3 \geq 0$	0	-1	0	0	≥ 0
	=	=	=	=	
	1	-2	0	1	

Az y_1, y_2, y_3 duális változók a három primálfeltételhez tartoznak. Mivel az első és a harmadik primálfeltétel egyenlőtlenség, ezért az y_1 és az y_3 változókra nemnegativitási feltétel van.

Az x_i -k egyikére sincs nemnegativitás, ezért mind a négy hozzájuk tartozó duálfeltétel egyenlőséggel fog állni. A keresett DLP tehát odafenn a jobboldalon látható.

Nem volt kérdés ugyan, de látszik, hogy a DLP-beli első és harmadik feltétel ellentmond egymásnak, ezért a DLP-nek nincs megoldása. Ennek megfelelően (szintén nem volt kérdés, de figyeljük), hogy az LP-ben a célfüggvényérték nem korlátos, azaz tetszőlegesen kicsi lehet, így minimum sem létezik.

$$\begin{aligned} &\max\{y_1 + y_2\} \\ &\text{ha } y_1, y_3 \geq 0 \\ &y_1 + y_2 = 1 \\ &2y_1 - y_3 = -2 \\ &y_1 + y_2 = 0 \\ &y_1 + 5y_2 = 1 \end{aligned}$$

2. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát (hasonló formában)!

$$\begin{aligned} &\max\{x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4\} \\ &\text{ha} \\ &x_1 - 3x_2 + 2x_4 \leq 3 \\ &x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq -2 \\ &-2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 3 \\ &x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 2 \\ &x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Mutassuk meg, hogy az $x_1 = x_2 = -7/6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1/3$ a primál feladat optimális megoldása, és az $y_1 = y_2 = y_4 = 1$, $y_3 = 3$ a duál feladat optimális megoldása.

Megoldás: a) Először hozzuk sztenderd alakra a rendszert. Mivel a célfüggvényben maximalizálunk, a lineáris feltételek $=$ és $\leq$ alakúak lehetnek (a nemnegativitási feltételek megmaradnak). Így a sztenderd alak az alábbi:

$$\begin{aligned} &\max\{x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4\} \\ &\text{ha} \\ &x_1 - 3x_2 + 2x_4 \leq 3 \\ &-x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 2 \\ &2x_2 - x_3 - 2x_4 \leq -3 \\ &x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 2 \\ &x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

(1 pont)

A dualizálási ökölszabályok szerint a duális (DLP) feladat változói a primál (LP) feltételeinek (az együtthatómátrix sorainak) felelnek meg,

(1 pont)

pontosan azon duál változók nemnegatívak, ahol a megfelelő primál feltételben egyenlőtlenség van,

(1 pont)

pont)

mivel az LP-ben maximalizálunk, a DLP célfüggvényében minimalizálunk, az optimalizálandó mennyiség pedig a duál változóknak a primál feltételek jobb oldalával vett kombinációja,

(1 pont)

a DLP lineáris feltételeinek jobb oldalai a primál célfüggvény együtthatói, és mivel a DLP is sztenderd alakú, $=$ és $\geq$ relációk szerepelhetnek,

(1 pont)

mégpedig pontosan a nemnegatív primál változóknak megfelelő duális feltételeknél lesz egyenlőtlenség.

(1 pont)

pont)

3. Határozzuk meg azt a primál LP problémát, melynek duálisa jobbra látható.

$$\begin{aligned} \min \{ & 7y_1 - 2y_3 \}, \text{ ha} \\ & y_1, y_3 \geq 0 \\ & 4y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 77 \\ & y_2 - 5y_3 = 9 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \geq 5 \end{aligned}$$

4. a) Írjuk fel a jobbra látható (n változós) lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis ne mátrixos alakot használjunk.)

$$\begin{aligned} \max \{ & nx_1 + (n-1)x_2 + \dots + 2x_{n-1} + x_n \} \\ \text{ha} \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ & \vdots \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

b) Igaz-e, hogy az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ választással a primál feladat optimális megoldását adtuk meg?

Megoldás: a) Advanced level: nem egy konkrét mátrixról van szó. Sebaj, rajzoljuk csak fel a számrözezetöt.

$$\begin{array}{ccccccc} & x_1 \geq 0 & \dots & x_n \geq 0 & & & \\ y_1 \geq 0 & \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array}} & & \leq 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & & \vdots & \\ y_n \geq 0 & \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & \dots & 1 \end{array}} & & \leq n & & \\ & \geq & \dots & \geq & & & \\ & n & \dots & 1 & & & \end{array}$$

Csak egyenlőtlenségek vannak, ezért minden duálváltozó nemnegatív. Az x -ek nemnegatívak, ezért minden duálfeltétel egyenlőtlenség. Jobbra látható a duális.

$$\begin{aligned} \min \{ & y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n \} \\ \text{ha } & y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0 \\ & y_1 + y_2 + \dots + y_n \geq n \\ & \vdots \\ & y_1 + y_2 \geq 2 \\ & y_1 \geq 1 \end{aligned}$$

b) Az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ megoldása az LP-nek, és a hozzá tartozó célfüggvényérték $n + (n-1) + \dots + 1 = \binom{n+1}{2}$. Vegyük észre, hogy az $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 1$ pedig a DLP megoldása, és a hozzá tartozó célfv érték $1 + 2 + \dots + n = \binom{n+1}{2}$. Mivel a két célfüggvényérték megegyezik, ezért az előző feladatban kifejtett gondolatmenet miatt mindkét megoldás optimális az adott problémára.

5. Két feladatsorral ezelőtt megnéztük, hogy ha adott egy élsúlyozott teljes páros gráf $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ csúcsosztályokkal, ahol az $a_i b_j$ él súlya w_{ij} , akkor hogyan lehet fölírni olyan lineáris programot, melyet megoldva megkapjuk a gráf egy minimális összsúlyú súlyozott lefogását. Mi ennek az LP-nek a duálisa?

6. a) Két feladatsorral ezelőtt azt is megnéztük, hogy adott G gráf legnagyobb független csúcshalmazának méretét hogyan lehet IP segítségével meghatározni. Adjuk meg ennek az IP-nek az LP relaxáltját, írjuk fel annak duálisát (DLP), valamint annak az egészértékű változatát (DIP). Fogalmazzuk meg, hogy a DLP / DIP egy megoldása mit jelent a gráfon értelmezve.

b) Konkrétan adjuk meg az IP, LP, DLP, DIP egy-egy optimális megoldását a C_5 gráfra és egy tetszőleges (nem túl nagy, nem triviális) páros gráfra.

Megoldás: a) Idézzük fel az IP-t: $\forall v \in V(G): 0 \leq x(v) \leq 1, x(v) \in \mathbb{Z}$, minden $uv \in E(G)$ élre $x(u) + x(v) \leq 1$, a célfüggvény $\max \sum_v x(v)$. Az LP relaxált az $x(v) \in \mathbb{Z}$ feltételek elhagyásával keletkezik. Ez egy általánosított sztenderd alakú LP, számrözezet segítségével dualizálunk (rajzoljuk föl!). Az $x(v) \leq 1$ feltételekből egy négyzetes egységmátrix adódik, az élekre felírt feltételekből egy-egy két egyest tartalmazó sor. Minden sor egyenlőtlenség, a jobb oldala 1. A célfüggvényt leíró c vektor is csupa 1 koordinátával bír. Az első típusú feltételek duálváltozóit jelölje $z(v)$ (minden v csúcshoz (tartozó feltételhez) tartozik egy), a második típusúaknál az $e = uv$ élből adódó feltétel duálváltozója legyen $y(e)$. Mivel az LP csupa $\leq$ -ből áll, a DLP minden változója nemnegatív. Az LP-ben maximalizálunk, tehát DLP-ben minimalizáljuk a célfüggvényt, ami $\sum_v z(v) + \sum_e y(e)$, hiszen az együtthatók az LP feltételeinek jobb oldalai, és ez mind 1. A DLP lin. feltételei az oszlopokból adódnak, azaz minden v csúcshoz tartozik egy. Az egységmátrixnál csak a $z(v)$ együtthatója egy (a többi 0), az éleknél pedig azon $y(e)$ változók együtthatója lesz 1, melyek illeszkednek a v csúcsra (a többi nulla), tehát a feltételek bal oldalán ezen változók összege áll, a jobb oldalán a c vektor megfelelő koordinátája, azaz 1. Mivel a primál változók mind nemnegatívak kell legyenek, minden feltétel egyenlőtlenség, mégpedig $\geq$, hiszen a DLP is általánosított sztenderd alakú, és a célfüggvénye minimalizálandó. Így a DLP feltételei: $\forall v \in V(G): z(v) + \sum_{uv \in E(G)} y(uv) \geq 1$. A DIP feladatban a $z(v)$ és $y(e)$ duálváltozók ráadásul egészek kell legyenek. A gráfon a DLP egy megoldása úgy szemléltethető, hogy minden csúcshoz és minden élhez kell egy nemnegatív súlyt rendelnünk ($z(v)$ és $y(e)$), mégpedig úgy, hogy minden csúcsra a csúcs és a belőle kiinduló él összsúlya legalább 1 legyen, és a cél az, hogy minimalizáljuk a gráf csúcsainak és éleinek összsúlyát. Észrevehetjük, hogy ezek a súlyok optimális megoldás esetén sosem lesznek egynél nagyobbak, hiszen egy egynél nagyobb súlyt egyre csökkentve ugyanúgy megoldást kapunk, viszont a célfüggvény értéke csökken. Magyarán néhány csúcsot és élt kell kiválasztanunk úgy, hogy ha egy csúcs nincs kiválasztva, akkor legalább egy belőle kiinduló él ki legyen választva. Ha egy csúcsból indul

ki él és a csúcsot kiválasztanánk, akkor legalább ilyen jól járunk, ha a csúcs helyett valamelyik belőle kiinduló élt választjuk ki. Emiatt optimális egészértékű megoldás annak felel meg, hogy a gráf izolált csúcsait kiválasztjuk, a többi csúcshoz meg egy minimális méretű lefogó élhalmazt keresünk (olyan élhalmazt, mely minden v csúcsra tartalmaz legalább egy v -ből induló élt).

b) A C_5 esetén az IP optimauma nyilván 2 (hiszen $\alpha(C_5) = 2$), két nemszomszédos súly változóját egyre állítjuk, a többiét 0-ra. Az LP optimum legalább $\frac{5}{2}$, mert megoldást kapunk, ha minden csúcs változójának $\frac{1}{2}$ értéket adunk. A DLP-nek megoldása, ha minden $y(e)$ élsúly $\frac{1}{2}$, a $z(v)$ csúcssúlyok pedig nullák, tehát a DLP optimauma legfeljebb $\frac{5}{2}$. Összevetve ezeket látjuk, hogy megtaláltuk az LP és a DLP optimumát. A DIP optimumértéke legalább 3, hiszen a DLP optimauma alsó korlátot ad, továbbá a DIP optimauma egész számok összege, tehát egész. Három összsúlyú egész megoldást kaphatunk úgy, ha két független él súlyát és az általuk le nem fedett csúcs súlyát (vagy valamelyik abból induló él súlyát) 1-re állítjuk.

c) Nyilván páros G gráfra is az IP optimauma $\alpha(G)$. A DIP-nek adhatunk egy megoldást úgy, hogy veszünk egy $v(G)$ méretű párosítást, ennek éleit 1 súllyal látjuk el, majd a párosítás által le nem fedett csúcsoknak szintén egységnyi súlyt adunk (motiváció: egy egy súlyú él két csúcsra adott feltételt intéz el, míg egy egy súlyú csúcs csak a sajátját, tehát minél több él súlyát szeretnénk 1-re választani úgy, hogy minél több csúcs feltételét kielégítsék, azaz ne legyenek közös végpontjaik). Könnyű látni, hogy ez megoldás, az összsúlya pedig $v(G) + n - 2v(G) = n - v(G)$, és ez mindig optimális lesz (a konkrét példa esetén erről meggyőződhetünk minden további eszmefuttatás nélkül).

Azért lássuk is be, hogy ez tényleg mindig optimális: König tétele szerint páros gráfban $v(G) = \tau(G)$, tehát a DIP optimauma legfeljebb $n - v(G) = n - \tau(G)$. Márpedig egy lefogó csúcshalmazban nem szereplő csúcsok a definíciókból azonnal adódóan független csúcshalmazt alkotnak, így legfeljebb $\alpha(G)$ darab van belőlük; ebből DIP optimum $\leq n - \tau(G) \leq \alpha(G) = \text{IP optimum}$ adódik, ugyanakkor IP optimum $\leq$ DIP optimum mindig fennáll, így az IP / DIP megoldásunk valóban optimális. Micsoda szerencse!

7. a) Mutassuk meg, hogy a múltkori feladatsoron szereplő, egy gráf kromatikus számának meghatározására való IP feladat LP relaxáltjának az optimauma legfeljebb kettő (függetlenül a gráftól). Sőt: az optimum pontosan kettő.

b)** Próbáljunk valamiképp javítani ezen a bosszantó helyzeten: egészítsük ki az IP-t olyan feltétellel (vagy többel), amivel az LP relaxált optimauma nagyobb lesz kettőnél. (Első kérdés: vajon ez minden gráf esetén megtehető?)

8. a) Józsi egyéni vállalkozó, éppen a következő munkanapját tervezi. A szokásos 9 órás munkaidejében kéne n megrendelt munka közül elvégeznie néhányat. Az i -edik munka időigénye t_i perc, és elvégzése esetén b_i forint bevételt hoz. Segítsünk Józsinak: írjunk fel olyan IP modellt, amivel maximalizálhatja másnapi bevételét.

b) Józsi most a következő két napját tervezi. Mutassunk olyan esetet, amikor Józsi elesik némi bevételtől, ha nem elég előrelátó, és mindig csak a másnapi munkákat tervezi meg. (Menet közben nem kap új megrendelést, és ha egy megrendelést nem tud ebben a két napban teljesíteni, akkor azt a megrendelő inkább lemondja. Józsi nem hagy félbe munkát: amit elkezd az egyik nap, azt be is akarja fejezni még aznap.)

c) Józsi levonta a tanulságot, és mivel sok megrendelés van a hétre (amit nem teljesít a héten, az elúszik), mind az öt munkanapot előre be akarja osztani. Segítsünk neki ebben is egy megfelelő IP-vel.

Megoldás: **a)** Változók: $x(i)$ bináris, jelentése: az i -edik munkát elvégezzük-e vagy sem.

Feltétel (csak egy darab van!): $\sum_{i=1}^n x(i)t_i \leq 540$.

Célfüggvény: $\max \sum_{i=1}^n x(i)b_i$.

b) Vegyük az alábbi táblázatban látható eshetőséget (m_i az i -edik munka, a t_i órában van kifejezve):

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
t_i	4	4	3	3	2	2
b_i	6	6	3	3	2	2

Ha Józsi naponta tervez, az első napra m_1 és m_2 fog kerülni, a második napra m_3 , m_4 és m_5 , az m_6 megrendelés elúszik. De két napra az összes munkát be tudná osztani, amivel persze jobban járna az összbevétel szempontjából.

c) $x(i, j)$ bináris változók: az i -edik munkát ütemezze-e a j -edik napra ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq 5$.)

Feltételek: minden i munkára $\sum_{j=1}^5 x(i, j) \leq 1$ (mindegyiket legfeljebb egy napra osszuk be), továbbá minden j munkanapra $\sum_{i=1}^n x(i, j)t_i \leq 540$. Továbbra is az elvégzett munkák után szerzett bevételt akarjuk maximalizálni, azaz a célfüggvény $\max \sum_{i,j} x(i, j)b_i$.

9. Adott néhány egész szám, $a_1, \dots, a_n$ (lehetnek köztük akár egyformák is). Azt kéne eldöntenünk, hogy vajon fel lehet-e bontani két részre ezeket a számokat úgy, hogy mindkét részben a számok összege ugyanannyi legyen. (Minden számot bele kellene sorolni valamelyik részbe; a részekben szereplő számok darabszáma lehet eltérő.) Oldjuk meg a feladatot IP modell segítségével.

Megoldás: Legyen $A = \sum_{i=1}^n a_i$. A feladat ekvivalens azzal, hogy vajon ki tudunk-e választani néhány számot úgy, hogy az összegük $A/2$ legyen; ekkor persze a ki nem választott számok összege szintén $A/2$ lesz, így megkapjuk a két

megfelelő részt. Legyen tehát $x(i)$ az a_i szám kiválasztásának indikátorváltozója. Feltétel: $\sum_{i=1}^n x_i a_i = A/2$. Most csak az a kérdés, hogy van-e megoldás, a megoldások között nincs rangsorolás, hogy melyik mennyire jó; azaz tetszőleges célfüggvényt megadhatunk, pl $\sum_{i=1}^n 0 \cdot x(i)$, vagy $\sum_{i=1}^n x(i)$ is jó (meg bármi más is).

Más megoldás: Az is jó modell, ha minden i -re két indikátorváltozót vezetünk be: $x(1, i)$ indikálja, hogy a_i -t bevesszük-e az első részbe vagy sem, $x(2, i)$ pedig azt, hogy a_i -t bevesszük-e a második részbe vagy sem. Feltételek: $\forall i: x(1, i) + x(2, i) = 1$; $\sum_{i=1}^n x(1, i) a_i = \sum_{i=1}^n x(2, i) a_i$.

10*. Gazdasági fellendülés van: az alapanyagokból korlátlan mennyiség áll rendelkezésre, és a vásárlók elkapkodják a boltokból a termékeket, bármennyit is áruljanak belőlük. Így hát vállalkozásba fogunk, n -féle terméket tervezünk előállítani. Nehéz dilemma előtt állunk: munkásokat béreljünk, vagy robotokat vásároljunk a termékek előállításához, esetleg vegyesen? Az i -edik termék előállítására képes szakmunkások napidíja n_i , és h_i főt találunk belőlük a munkaerőpiacon. Egy ugyanerre a munkára alkalmas robot egyszeri fejlesztési költsége f_i , a fejlesztés után korlátlan számban gyártatható, beszerzési darabára b_i , napi üzemeltetési költsége u_i . Az i -edik termékből egy ember naponta m_i^e , egy robot m_i^r darabot tud előállítani, a termék eladási ára d_i . A robotok heti hét napot dolgoznak, a munkások csak ötöt. Az emberek számára megfelelő épületek bérleti díja hetente e^e , kapacitása c^e munkás per épület, a robotok számára megfelelők heti bérleti díja e^r , kapacitása c^r robot per épület. Önerőnk nincs, a rendelkezésre álló hitelkeretünk H (ebből a robotok fejlesztési és beszerzési költségét kell fedezni, az üzemeltetési költségeket terv szerint a bevételekből rendezzük), szerencsére a gazdaság élénkítését célzó akcióterv keretében kamatmentes, 500 hét múlva kell visszafizetni egy összegben. A célunk a vállalkozás kialakítása oly módon, hogy a hitel visszafizetése utáni pillanatban a lehető legtöbb pénzünk legyen. Írjunk fel olyan IP-t, mellyel az optimális struktúra megtervezhető.

Megoldás: Vezessünk be változókat: jelölje $0 \leq x^e(i) \in \mathbb{Z}$ és $0 \leq x^r(i) \in \mathbb{Z}$ azt, hogy az i -edik terméket előállítani képes szakmunkásból, illetve robotból mennyit fogunk alkalmazni. A feltételek jó része a szokásos módon felírható. Ami érdekesebb, hogy hogyan kezeljük a robotok egyszeri fejlesztési költségét, illetve a bérlendő épületek darabszámát. Ehhez vezessünk be segédváltozókat: legyen $z(i)$ bináris változó, és terv szerint jelentse azt, hogy az i -edik robotból akarunk-e gyártatni néhányat ($z(i) = 1$, ha igen). Írjunk fel két egyenlőtlenséget: az $x^r(i) \geq z(i)$ garantálja, hogy ha megterveztetjük az i -edik fajta robotot, akkor abból gyártassunk is legalább egyet; az $x^r(i) \leq z(i) \cdot \frac{H-f_i}{b_i}$ feltétel (ahol $\frac{H-f_i}{b_i}$ egy felső korlát az i -edik típusból beszerezhető robotjaink számára) pedig azt szavatolja, hogy ha $x^r(i) \geq 1$, akkor $z(i) = 1$ legyen. Ezek után $\sum_i z(i) f_i$ a fejlesztések összköltsége. (Az első feltétel el is hagyható, mert optimális megoldás esetén úgy sem fizetünk fölösleges fejlesztésért.)

A kétféle bérlendő épületek darabszámára vezessük be az E^e és az E^r nemnegatív egészértékű változókat, valamint a bennük elhelyezendő munkások számára az $(E^e - 1)c^e + 1 \leq \sum_i x^e(i) \leq E^e c^e$ feltételeket. Ezek garantálják, hogy E^e darab épületbe a munkások elférnek, de eggyel kevesebb nem elég. A robotok számára szükséges épületek számát analóg módon nyilván tudjuk tartani, és ezekkel az épületek bérleti költségeit is ki tudjuk fejezni.