

Kombinatorikus optimalizálás 2025. II. félév

9. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Definíció: Egy LP feladat *általánosabb sztenderd alakú*, ha a feltételrendszere egyenlőségekből, egyenlőtlenségekből és nemnegativitási feltételekből áll, továbbá minimalizálás esetén minden egyenlőtlenség $\geq$, maximalizáláskor pedig $\leq$ alakú (ide nem értve a nemnegativitási feltételeket).

Definíció: Az LP-vel jelölt $\max\{cx : Ax \leq b\}$ primál feladat *duálisa* a DLP-vel jelölt $\min\{yb : y \geq 0, yA = c\}$ lineáris programozási feladat.

Dualitástétel. Tetszőleges $\max cx$ típusú LP feladatra és $\min yb$ típusú DLP duálisára az alábbi lehetőségek közül pontosan egy teljesül.

- (1) Sem az LP, sem a DLP nem megoldható.
- (2) Az LP nem megoldható, a DLP igen, és a DLP megoldásain az yb célfüggvényérték alulról nem korlátos.
- (3) A DLP nem megoldható az LP igen, és az LP megoldásain a cx célfüggvényérték felülről nem korlátos.
- (4) Az LP és a DLP is megoldható, és az optimumértékek azonosak:

$$\max\{cx : x \text{ az LP megoldása}\} = \min\{yb : y \text{ a DLP megoldása}\}.$$

Következmény: (1) Ha x és y a fenti LP ill DLP megoldásai, akkor $cx \leq yb$.

(2) (Optimalitási kritérium) Ha a fenti LP ill. DLP feladatok x ill. y megoldásaira $cx = yb$ teljesül, akkor x a primál LP, y pedig a duál DLP optimális megoldásai.

Megjegyzés: LP/DLP feladat duálisa az alábbi ökölszabályok segítségével képezhető.

- (0) Ne szégyelljünk számárvezetőt használni.
- (1) A feladatokat általánosabb sztenderd alakban írjuk fel.
- (2) Az LP, ill. DLP egyikében maximalizálunk, a másikban minimalizálunk.
- (3) Duál változóhoz primál feltételek, duál feltételekhez primál változók tartoznak, és viszont.
- (4) Nemnegatív változóhoz egyenlőtlenség, előjelkötetlen változóhoz egyenlőség tartozik.
- (5) A primál célfv együtthatói a duál konstansok, a duál célfv együtthatói pedig a primál konstansok.
- (6) Az ezen szabályokkal képzett primál/duál feladat is sztenderd alakú.

Egészértékű / vegyes lineáris program (Integer / Mixed Linear Program, IP / MIP): egy szokásos lineáris program (változók, lineáris feltételek (egyenletek és egyenlőségek), lineáris célfüggvény), de azt is előírjuk, hogy minden / néhány változó csak egész értéket vehet föl.

Egy egészértékűségi feltétel *relaxációja* az, hogy eltekintünk tőle, és a feladatot úgy oldjuk meg, hogy a relaxált változó valós értéket is felvehet. Egy IP vagy MIP **LP-relaxáltja** az összes egészértékűségi feltétel relaxálásával kapott LP.

Egy LIP/MIP megoldásai természetesen megoldásai a (részben) relaxált változatnak is, viszont a relaxált LP megoldáshalmaza lehet szigorúan bővebb is, mint az eredetie. Emiatt a relaxált program célfüggvényértéke általában csak becslést ad az eredetire (ha maximalizálunk, akkor a relaxált LP optima esetleg nagyobb az eredetiénél; ha minimalizálunk, akkor esetleg kisebb). Tehát, ha az IP: $\max cx : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n$, akkor a relaxált LP: $\max cx : Ax \leq b$, ennek duálisa DLP: $\min yb : y \geq 0, yB = c$, és ennek egészértékű megszorítása (duális IP) DIP: $\min yb : y \geq 0, yB = c, y \in \mathbb{Z}^k$. Ekkor a célfüggvények optimumára (ha léteznek megoldások): $\max_{IP} cx \leq \max_{LP} cx = \min_{DLP} yb \leq \min_{DIP} yb$. Gyakorta megesik, hogy $\max_{IP} cx < \max_{LP} cx$. Ha olyan szerencsénk van, hogy nem ez a helyzet, akkor egy IP megoldás optimalitását igazolhatjuk a DLP egy optimális megoldásának prezentálásával (az IP és DLP célfüggvényértékek ekkor egybeesnek, igazolva egymás optimalitását).

Gyakorlatok

1. Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát!

$$\begin{aligned} \min & \{x_1 - 2x_2 + x_4\} \\ \text{ha} \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ & x_1 + x_3 + 5x_4 = 1 \\ & x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

2. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát (hasonló formában)!

$$\begin{aligned} \max & \{x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4\} \\ \text{ha} \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_4 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq -2 \\ & -2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 2 \\ & x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Mutassuk meg, hogy az $x_1 = x_2 = -7/6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1/3$ a primál feladat optimális megoldása, és az $y_1 = y_2 = y_4 = 1$, $y_3 = 3$ a duál feladat optimális megoldása.

3. Határozzuk meg azt a primál LP problémát, melynek duálisa jobbra látható.

$$\begin{aligned} \min \{ & 7y_1 - 2y_3 \}, \text{ ha} \\ & y_1, y_3 \geq 0 \\ & 4y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 77 \\ & y_2 - 5y_3 = 9 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \geq 5 \end{aligned}$$

4. a) Írjuk fel a jobbra látható (n változós) lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis ne mátrixos alakot használjunk.)

$$\begin{aligned} \max \{ & nx_1 + (n-1)x_2 + \dots + 2x_{n-1} + x_n \} \\ \text{ha} \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ & \vdots \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

b) Igaz-e, hogy az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ választással a primál feladat optimális megoldását adtuk meg?

5. Két feladatsorral ezelőtt megnéztük, hogy ha adott egy élsúlyozott teljes páros gráf $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ csúcsosztályokkal, ahol az $a_i b_j$ él súlya w_{ij} , akkor hogyan lehet fölírni olyan lineáris programot, melyet megoldva megkapjuk a gráf egy minimális összsúlyú súlyozott lefogását. Mi ennek az LP-nek a duálisa?

6. a) Két feladatsorral ezelőtt azt is megnéztük, hogy adott G gráf legnagyobb független csúcshalmazának méretét hogyan lehet IP segítségével meghatározni. Adjuk meg ennek az IP-nek az LP relaxáltját, írjuk fel annak duálisát (DLP), valamint annak az egészértékű változatát (DIP). Fogalmazzuk meg, hogy a DLP / DIP egy megoldása mit jelent a gráfon értelmezve.

b) Konkrétan adjuk meg az IP, LP, DLP, DIP egy-egy optimális megoldását a C_5 gráfra és egy tetszőleges (nem túl nagy, nem triviális) páros gráfra.

7. a) Mutassuk meg, hogy a múltkori feladatsoron szereplő, egy gráf kromatikus számának meghatározására való IP feladat LP relaxáltjának az optimauma legfeljebb kettő (függetlenül a gráftól). Sőt: az optimum pontosan kettő.

b**) Próbáljunk valamicskét javítani ezen a bosszantó helyzeten: egészítsük ki az IP-t olyan feltétellel (vagy többel), amivel az LP relaxált optimauma nagyobb lesz kettőnél. (Első kérdés: vajon ez minden gráf esetén megtehető?)

8. a) Józsi egyéni vállalkozó, éppen a következő munkanapját tervezi. A szokásos 9 órás munkaidejében kéne n megrendelt munka közül elvégeznie néhányat. Az i -edik munka időigénye t_i perc, és elvégzése esetén b_i forint bevételt hoz. Segítsünk Józsinak: írjunk fel olyan IP modellt, amivel maximalizálhatja másnapi bevételét.

b) Józsi most a következő két napját tervezi. Mutassunk olyan esetet, amikor Józsi elesik némi bevételtől, ha nem elég előrelátó, és mindig csak a másnapi munkákat tervezi meg. (Menet közben nem kap új megrendelést, és ha egy megrendelést nem tud ebben a két napban teljesíteni, akkor azt a megrendelő inkább lemondja. Józsi nem hagy félbe munkát: amit elkezd az egyik nap, azt be is akarja fejezni még aznap.)

c) Józsi levonta a tanulságot, és mivel sok megrendelés van a hétre (amit nem teljesít a héten, az elúszik), mind az öt munkanapot előre be akarja osztani. Segítsünk neki ebben is egy megfelelő IP-vel.

9. Adott néhány egész szám, $a_1, \dots, a_n$ (lehetnek köztük akár egyformák is). Azt kéne eldöntenünk, hogy vajon fel lehet-e bontani két részre ezeket a számokat úgy, hogy mindkét részben a számok összege ugyanannyi legyen. (Minden számot bele kellene sorolni valamelyik részbe; a részekben szereplő számok darabszáma lehet eltérő.) Oldjuk meg a feladatot IP modell segítségével.

10*. Gazdasági fellendülés van: az alapanyagokból korlátlan mennyiség áll rendelkezésre, és a vásárlók elkapkodják a boltokból a termékeket, bármennyit is áruljanak belőlük. Így hát vállalkozásba fogunk, n -féle terméket tervezünk előállítani. Nehéz dilemma előtt állunk: munkásokat béreljünk, vagy robotokat vásároljunk a termékek előállításához, esetleg vegyesen? Az i -edik termék előállítására képes szakmunkások napidíja n_i , és h_i főt találunk belőlük a munkaerőpiacon. Egy ugyanerre a munkára alkalmas robot egyszeri fejlesztési költsége f_i , a fejlesztés után korlátlan számban gyártatható, beszerzési darabára b_i , napi üzemeltetési költsége u_i . Az i -edik termékből egy ember naponta m_i^e , egy robot m_i^r darabot tud előállítani, a termék eladási ára d_i . A robotok heti hét napot dolgoznak, a munkások csak ötöt. Az emberek számára megfelelő épületek bérleti díja hetente e^e , kapacitása c^e munkás per épület, a robotok számára megfelelők heti bérleti díja e^r , kapacitása c^r robot per épület. Önerőnk nincs, a rendelkezésre álló hitelkeretünk H (ebből a robotok fejlesztési és beszerzési költségét kell fedezni, az üzemeltetési költségeket terv szerint a bevételekből rendezzük), szerencsére a gazdaság élénkítését célzó akcióterv keretében kamatmentes, 500 hét múlva kell visszafizetni egy összegben. A célunk a vállalkozás kialakítása oly módon, hogy a hitel visszafizetése utáni pillanatban a lehető legtöbb pénzünk legyen. Írjunk fel olyan IP-t, mellyel az optimális struktúra megtervezhető.