

Kombinatorikus optimalizálás 2025. II. félév

8. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Egészértékű / vegyes lineáris program (Integer / Mixed Linear Program, ILP / MIP): egy szokásos lineáris program (változók, lineáris feltételek (egyenletek és egyenlőségek), lineáris célfüggvény), de azt is előírjuk, hogy minden / néhány változó csak egész értéket vehet föl.

Szóhasználat: igen / nem típusú döntéseket gyakran bináris, azaz csak 0 és 1 értéket fölvenni tudó változókkal kódolunk. Ezeket szokás *indikátorváltozónak* nevezni. Ha egy megfelelő tulajdonságú halmazt keresünk, akkor minden szóba jövő elemről el kell döntenünk, hogy beletesszük-e a halmazunkba. A szóba jövő elemeknek megfelelő változókat egy vektorba rendezve kapjuk a halmaz *karakterisztikus vektorát*, ebben tehát a koordináták a szóba jövő elemeknek (pl az alaphalmaz elemeinek) felelnek meg, és aszerint 0 vagy 1 az értékük, hogy a megfelelő elem benne van-e a halmazunkban vagy sem.

Jó tudni: LP problémákra van jónéhány elméletileg és a gyakorlatban is hatékony, ténylegesen implementált algoritmus, tehát LP feladatokat többnyire gyorsan meg lehet oldani nagyobb modellek esetében is. Ezzel szemben az IP feladatokra nincsen univerzálisan hatékony megoldási módszer (bizonyítottan kemény dió), de azért vannak működő, implementált algoritmusok, melyek kisebb vagy szerencsésebb IP modellek esetében megbirkóznak a feladattal.

Gyakorlatok

1. Adott $G = (V, E)$ gráf esetén írjuk fel IP feladatként a G -beli maximális méretű klikk méretének, azaz $\omega(G)$ -nek, ill. a maximális méretű független ponthalmaz méretének, azaz $\alpha(G)$ -nek a meghatározását.

Megoldás: Maximális klikk keresésekor minden egyes csúcsokról döntést kell hoznunk, hogy kiválasztjuk-e vagy sem, tehát csúcsokhoz fogunk változókat rendelni: minden $v \in V$ csúcsra $x(v)$ egy változó, és $x(v)$ akkor lesz 1, ha v benne van a megoldás klikkben, egyébként 0. Mivel azt szeretnénk, hogy a változóink csak 0 vagy 1 értéket vegyenek föl, megköveteljük az alábbi feltételeket:

$$\begin{aligned}\forall v \in V: \quad x(v) &\geq 0 && \text{(nemnegativitás)} \\ \forall v \in V: \quad x(v) &\leq 1 && \text{(lineáris feltétel)} \\ \forall v \in V: \quad x(v) &\in \mathbb{Z} && \text{(egészértékűségi feltétel)}\end{aligned}$$

A kiválasztott csúcsok klikket kell alkossanak, tehát ha két csúcs közt nem fut él, akkor nem választhatjuk ki mindkettőt. Emiatt az összes nemszomszédos u, v csúcspárra megköttjük, hogy nem választhatjuk ki mindkettőt:

$$\forall u \neq v \in V, uv \notin E: \quad x(v) + x(u) \leq 1 \quad \text{(lineáris feltétel)}$$

A rendszerünk tetszőleges megoldására $\{v \in V: x(v) = 1\}$ a G gráf egy klikkjét alkotja, és fordítva, ha a $H \subset V$ csúcshalmaz klikket alkot G -ben, akkor az $x(v) = 1$, ha $v \in H$, $x(v) = 0$, ha $v \notin H$ értékadás megoldást ad, tehát sikerült megfelelő IP-t felírni. Egy megoldásnak megfelelő klikk mérete éppen $\sum_{v \in V} x(v)$. Mivel a célunk a klikkben szereplő csúcsok számának maximalizálása, az IP célfüggvénye $\max \sum_{v \in V} x(v)$.

A maximális független ponthalmaz voltaképp a komplementergráf klikkje. Ezért minden szó szerint működik az előző megoldásból azzal, hogy az utolsó feltétel megváltozik: nem azt kívánjuk, hogy bármely két nem szomszédos csúcs közül legfeljebb egy tartozhat a szóban forgó U halmazhoz, hanem azt, hogy bármely két *szomszédos* csúcsra legyen ez így: $x(u) + x(v) \leq 1$ teljesül G bármely uv élére.

2. Adott G összefüggő, legalább két csúcsú gráf kromatikus számát szeretnénk megállapítani. Írjunk fel olyan IP feladatot, amivel ez megtehető.

Megoldás: Tanultuk, hogy $\Delta(G) + 1$ szín biztosan elegendő G csúcsainak jó színezéséhez. Legyen $m = \Delta(G) + 1$, a cél az, hogy a $C = \{1, 2, \dots, m\}$ színhalmazból a lehető legkevesebb használatával megszínezzük jól a gráf csúcsait. Minden csúcsra el kell döntsük, hogy milyen színt kap; vezessünk be minden $v \in V(G)$ csúcsra és minden $i \in C$ színre egy $x(v, i)$ változót, ami azt kódolja, hogy a v csúcs i színű-e: ha igen, akkor legyen $x(v, i) = 1$, ha nem, akkor legyen $x(v, i) = 0$. Tehát a feltételeink a változókra eddig:

$$\forall v \in V(G), \forall i \in C: 0 \leq x(v, i) \leq 1, x(v, i) \in \mathbb{Z}.$$

Továbbá nyilván akarjuk tartani minden $i \in C$ -re, hogy az i -edik színt használtuk-e; ezt új változók bevezetésével tudjuk megvalósítani. Legyen tehát minden $i \in C$ -re $w(i)$ egy új változó, melynek azt a jelentést szánjuk, hogy $w(i) = 0$, ha egyik csúcsnál sem használjuk az i -edik színt, és $w(i) = 1$, ha valamelyik csúcsnál használjuk az i -edik színt. Először írjuk fel a $w(i)$ bináriságát biztosító feltételeket:

$$\forall i \in C: 0 \leq w(i) \leq 1, w(i) \in \mathbb{Z}.$$

A cél az, hogy olyan lineáris feltételeket fogalmazzunk meg, ami biztosítja, hogy a jó színezések és a rendszer megoldásai kölcsönösen egyértelműen megfeleljenek egymásnak. Ehhez biztosítanunk kell, hogy minden csúcs pontosan egyféle színt kap, azaz előírjuk a

$$\forall v \in V(G): \sum_{i \in C} x(v, i) = 1 \quad (1)$$

feltételeket. Másrészt kell, hogy jó színezést kapjunk, azaz minden élnek a két végpontja eltérő színű legyen; máshogy szólva, bármely uv élre és bármely i színre az élnek legfeljebb az egyik végpontja lehet i színű; ráadásul csak lehet az egyik ténylegesen i színű, ha az i színt használjuk. Lineáris feltételként tehát előírjuk, hogy

$$\forall uv \in E(G), \forall i \in C: x(u, i) + x(v, i) \leq w(i). \quad (2)$$

Gondoljuk meg, hogy a rendszerünk megoldásai és a jó csúcsszínezések valóban megfelelnek egymásnak. Ha van egy jó színezésünk, akkor a változók tervezett jelentése alapján minden $w(i)$ és $x(v, i)$ változónak adjunk a színezésnek megfelelően 0 vagy 1 értéket. Ez valóban megoldása lesz a rendszerünknek. Fordítva, tegyük föl, hogy van egy $w(i)$, $x(v, i)$ megoldásunk. Ekkor az (1) feltételek miatt minden v csúcson pontosan egy i -re lesz $x(v, i) = 1$. Mivel a gráfunk összefüggő és legalább két csúcsú, nincs izolált csúcsa, tehát minden v csúcsból kiindul legalább egy vu él. A (2) az i színre és a vu élre $x(u, i) + x(v, i) = x(u, i) + 1 \leq w(i)$ miatt valóban $w(i) = 1$ kell legyen. Másrészt ha $w(i) = 0$, akkor semelyik v csúcra nem lehet $x(v, i) = 1$, hiszen ugyanúgy egy vu élre $x(u, i) + x(v, i) \leq w(i) = 0$ miatt $x(v, i) = 0$ kell legyen. Tehát a változók tervezett jelentése alapján valóban adhatunk egy jó színezést, mely pontosan azokat az i színeket használja, melyekre $w(i) = 1$.

Már csak a színszám minimalizálása a feladat, amit a célfüggvény megválasztásával érünk el: mivel $\sum_{i \in C} w(i)$ éppen a használt színek száma, a

$$\min \sum_{i \in C} w(i)$$

megfelelő célfüggvény.

3. Már láttuk, hogy a folyamproblémát könnyű megfogalmazni LP feladatként. Nézzük a következő variánst: adott (G, s, t, c) hálózaton most még üzemeltetési költségek is vannak: minden e élre adott egy $d(e)$ egyéni szállítási költség, tehát ha az e élen $x(e)$ mennyiségű terméket akarunk szállítani, azért $x(e)d(e)$ díjat kell fizetnünk. Hogyan lehetne minimális költségű maximális folyamot keresni LP módszerekkel?

Megoldás: Először írjuk fel a már látott LP-t maximális folyam keresésére, és oldjuk meg. Ebből kiderül, hogy mekkora a maximális folyam nagyság, legyen m . Ezután egészítsük ki az LP-t egy lineáris feltétellel, mely előírja, hogy a folyamunk nagysága m legyen, és a célfüggvény legyen $\min \sum_{e \in E(G)} x(e)d(e)$. A megoldás egy minimális költségű maximális folyam.

4. Az előző feladathoz képest annyiban változott a helyzet, hogy a hálózatot üzemeltető cég változtatott a díjszabásán: élhasználati díjat vezet be, azaz minden egyes élre megad egy (pozitív) $d(e)$ költséget, melyet akkor kell megfizetni, ha használni szeretnénk az adott e élt, függetlenül attól, hogy mennyi terméket szállítunk az adott élen. Adjunk olyan MIP modellt, mellyel találhatunk minimális költségű maximális folyamot.

Megoldás: A maximális folyam nagyságot a szokásos LP modellel kiderítjük (az $x(e)$ változó jelentse az e élen felvett folyamértéket). A költségek adminisztrálásához szükségünk van minden e élre egy $w(e)$ indikátorváltozóra, ami aszerint 1 vagy 0, hogy az e élen szállítunk-e terméket vagy sem. Először is a szokásos feltételekkel garantáljuk $w(e)$ bináris voltát:

$$\forall e \in E(G): 0 \leq w(e) \leq 1, w(e) \in \mathbb{Z}.$$

A változók jelentésének garantálásához írjuk elő az alábbiakat:

$$\forall e \in E(G): x(e) \leq w(e)c(e).$$

Ez garantálja, hogy ha $x(e) > 0$, akkor $w(e) = 1$ kell legyen, és ebben az esetben a feltétel nem jelent a szokásos kapacitásfeltételhez képest új megszorítást $x(e)$ -re. Azt nem garantáltuk, hogy $x(e) = 0$ esetén $w(e) = 0$ is kénytelen legyen teljesülni. De nem is kell: ha a célfüggvényünk a költségek minimalizálása, azaz $\min \sum_{e \in E(G)} w(e)d(e)$, akkor optimális megoldás esetén semelyik e élre sem lehet $x(e) = 0$ és $w(e) = 1$, hiszen a $w(e) = 0$ választással szintén megoldást kapnánk, de a célfüggvény értéke csökkenne (mivel $d(e)$ pozitív).

5. Piréziában besugóhálózatot építenek ki a megbízhatónak gondolt célszemélyek beszerzésével. A cél, hogy minden város lakosai között legyen legalább 66 ügynök, ám nem dolgozhat a hálózatban 3-nál több tagja egyetlen családnak sem. Mindezt a lehető legkisebb hálózat kiépítésével szeretnék elérni.

Írjunk fel egy olyan LP vagy IP feladatot, aminek a megoldásával meghatározható, kiket kell beszervezni a cél elérése érdekében: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris, és esetleges nemnegativitási ill. egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt. (Ismertnek tekinthetjük Pirézia lakosainak, városainak és családjainak P , V , illetve CS halmazát, ahol V és CS elemei az adott város lakóiból, illetve család tagjaiból álló halmazok.)

Megoldás: Vezessünk be minden potenciális ügynökhöz egy-egy változót, az $x(p)$ a p személyhez tartozó változó. A beszervezendő emberek halmazának karakterisztikus vektoraként szeretnénk megtalálni a megoldást (azaz a beszervezendő embereknek megfelelő $x(p)$ változó, avagy koordináta, 1 legyen, a többieké 0), ehhez keressük a célfüggvényt és a feltételeket. Egy ilyen karakterisztikus vektorhoz könnyű meghatározni a célfüggvényt: az összes változó összegét, azaz a $\sum_{p \in P} x(p)$ mennyiséget akarjuk minimalizálni, ahol P jelöli Pirézia beszervezhető lakóinak halmazát.

A tanult módon érjük el, hogy karakterisztikus vektorral dolgozzunk: minden $x(p)$ változóhoz tartozik a $0 \leq x(p)$ nemnegativitási és az $x(p) \leq 1$ lineáris feltétel, valamint egy $x(p) \in \mathbb{Z}$ egészértékűségi megkötés.

A 66 városi ügynökre vonatkozó kritérium is lefordítható lineáris feltételre: minden V városhoz tartozik egy feltétel, nevezetesen, hogy a V lakosaihoz tartozó változók összegének legalább 66: $\sum_{p \in V} x(p) \geq 66$.

Ezen kívül minden C családhoz is tartozik egy feltétel, nevezetesen, hogy a C család tagjaihoz tartozó változók összege legfeljebb 3: $\sum_{p \in C} x(p) \leq 3$.

A kapott ILP megoldásai a feltételeknek megfelelő beszervezések, a célfüggvényt optimalizáló egész megoldás pedig megadja, hogy konkrétan kik a beszervezési kampány célszemélyei.

6. Piréziában az emberek kétfélék: minden polgár vagy oltásszkeptikus vagy oltáshívő. A kormány az átoltottság mihamarabbi elérésének érdekében úgy szeretné levezényelni az oltáskampányt, hogy minden oltásszkeptikusnak legalább 13 oltáshívő facebook-ismerőst beoltsák. (Az oltásszkeptikusok rendkívül aktívak a szociális médiában, mindegyiküknek száz feletti fb-ismerőse van, ezek legalább fele oltáshívő.) Sajnos az oltóanyag csak szűkösen áll rendelkezésre. Írjunk fel egy olyan LP vagy IP feladatot, aminek a megoldásával meghatározható, hogyan lehet minimális számú ember beoltásával elérni a kitűzött célt: válasszunk alkalmas változókat és adjuk meg a megfelelő lineáris, és esetleges nemnegativitási ill. egészértékűségi feltételeket valamint a célfüggvényt.

(A kormány természetesen mindenkiről tudja, melyik csoportba tartozik és kik is a fb-ismerősei.)

Megoldás: Vezessünk be minden potenciális oltakozóhoz egy-egy változót, az $x(v)$ a v oltáshívő személyhez tartozó változó. A beoltandó emberek halmazának karakterisztikus vektoraként szeretnénk megtalálni a megoldást, ehhez keressük a célfüggvényt és a feltételeket. Egy ilyen karakterisztikus vektorhoz könnyű meghatározni a célfüggvényt: az összes változó összegét, azaz az $\tilde{x}(V)$ mennyiséget akarjuk minimalizálni, ahol V jelöli Pirézia beoltható lakóinak halmazát.

A tanult módon érjük el, hogy karakterisztikus vektorral dolgozzunk: minden $x(v)$ változóhoz tartozik a $0 \leq x(v)$ nemnegativitási és az $x(v) \leq 1$ lineáris feltétel, valamint egy egészértékűségi megkötés. A 13 beoltott facebook ismerőse vonatkozó kritérium is lefordítható lineáris feltételre. Minden oltásszkeptikus lakoshoz (hívjuk v -nek) tartozik egy feltétel, nevezetesen, hogy a v facebook oltáshívő ismerőseihez tartozó változók összegének legalább 13-nak kell lennie. Ha ezt formalizálni akarjuk, akkor pl bevezethetjük a $G = (V, E)$ gráfot, amelynek csúcshalmaza $V = V_1 \cup V_2$, ahol V_1 az oltásszkeptikus, V_2 pedig az oltáshívő lakosok halmaza, az E élhalmaz élei pedig az oltásszkeptikus lakosokat kötik össze az oltáshívő facebook-ismerőseikkel; egy v csúcsra $N(v)$ jelöli a v -vel szomszédos csúcsok halmazát. Ebben az esetben az IP feladatban szereplő lineáris feltétel az lesz, hogy $\tilde{x}(N(v)) \geq 13$ (azaz $\sum_{u \in N(v)} x(u) \geq 13$) teljesül a G gráf minden $v \in V_1$ csúcsára. Az így kapott ILP probléma éppen a kitűzött feladatot fogalmazza meg.

7. Adott $G = (V, E)$ irányított gráf, $s, t \in V$ csúcsok és $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ hosszfüggvény esetén írjuk fel IP (vagy LP) feladatként a legrövidebb st -út meghatározását.

Megoldás: Jelölje $x(v) = \text{dist}_\ell(s, v)$ az ℓ hosszfv szerint legrövidebb sv -út hosszát. A cél az $x(t)$ meghatározása. Ha $uv \in E(G)$ egy él, akkor s -ből el lehet jutni v -be úgy, hogy egy legrövidebb su -utat meghosszabbítunk az uv éllel. A legrövidebb sv -út ennél az útnál nem lehet hosszabb, azaz teljesül, hogy $x(v) \leq x(u) + \ell(uv)$. Tekintsük azt az LP feladatot, amiben $x(s) = 0$ mellett minden $uv \in E$ élre megkívánjuk az iménti feltétel teljesülését. Ennek a feladatnak $x(v) = \text{dist}_\ell(s, v) \forall v$ egy megoldása. Igaz továbbá, hogy ha $s, v_1, v_2, \dots, v$ egy legrövidebb sv -út, akkor $\text{dist}_\ell(s, v) = \ell(sv_1) + \ell(v_1v_2) + \dots = x(s) + \ell(sv_1) + \ell(v_1v_2) + \dots \geq x(v_1) + \ell(v_1v_2) + \dots \geq x(v_2) + \dots \geq \dots \geq x(v)$, tehát az LP bármely megoldására és G bármely v csúcsára teljesül, hogy $x(v) \leq \text{dist}(s, v)$, és az LP-nek van olyan megoldása, amire $x(v) = \text{dist}(s, v)$. Ezért ha a célfüggvényt $\max x(t)$ -nek választjuk, akkor az optimum éppen a $\text{dist}(st)$ érték lesz.

Hurrá: nem is kellett IP, elég volt az LP.

8. Adott $G = (V, E)$ gráf és $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény esetén fogalmazzuk meg a maximális súlyú párosítás feladatát IP feladatként. Tekintsük a feladat LP relaxációját is (ahol egész helyett valós számokat is megengedünk a megoldásban). Igaz-e, hogy tetszőleges G gráfra a célfüggvény maximuma az IP és az LP relaxáció esetén egybeesik?

9. Egy sakktáblára szeretnénk minél kevesebb huszárt (lovat) föltenni úgy, hogy a tábla minden mezőjét legalább az egyik huszár támadja. Írjunk föl olyan LP vagy IP feladatot, melynek megoldásával meghatározható a huszárok minimálisan szükséges száma és egy optimális elrendezés.

Megoldás: Legyen V a sakktábla mezőinek halmaza, és minden $v \in V$ mezőre legyen $N(v)$ azon mezők halmaza, melyeket egy huszár v -ből támadni tud (ezt minden v mezőre könnyen meghatározható, persze „kézzel” némileg hosszadalmas volna). A sakktábla minden v mezőjéhez rendeljünk egy-egy x_v változót; ez fogja azt jelenteni, hogy a v mezőre teszünk-e huszárt, és ennek megfelelően értéke 0 vagy 1 kell legyen. Feltétel továbbá, hogy minden v mezőt támadjon valamelyik huszár, tehát az $N(v)$ -beli mezők közül legalább az egyikre tegyünk egyet. Ennek megfelelően a feltételeink:

$$\begin{aligned} \forall v \in V: x_v &\geq 0 \\ \forall v \in V: x_v &\leq 1 \\ \forall v \in V: x_v &\in \mathbb{Z} \\ \forall v \in V: \sum_{u \in N(v)} x_u &\geq 1, \end{aligned}$$

a célfüggvény pedig $\min \sum_{v \in V} x_v$.