

# Kombinatorikus optimalizálás 2025. II. félév

1. gyakorlat. Fleiner Tamás feladatsora alapján összeállította: Héger Tamás (heger@cs.bme.hu)

**Tudnivalók** **Def.:** A  $G$  egyszerű gráf csúcsainak egy jó  $k$ -színezésén az  $1, 2, \dots, k$  számoknak (= színeknek) a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak. (Formálisan, egy olyan  $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  függvény, amire  $uv \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$ .) Egy  $(k)$ -színezésben az azonos színt kapó csúcsok halmazát *színosztálynak* nevezzük. (Színosztályon belül  $G$ -nek nem futhat éle.) A  $G$  gráf *kromatikus száma*  $\chi(G) = k$ , ha  $G$  kiszínezhető  $k$  színnel, de  $(k - 1)$ -gyel nem.

**Megfigyelés:** Ha  $G$   $k$ -színezhető, akkor  $G$ -ben nincs hurokél. A párhuzamos élek nem zavarhatnak. Gráfok csúcsainak színezésekor feltehető, hogy a gráf egyszerű.

**Def.:** A  $G$  gráf *klikkje* a  $G$  egy teljes részgráfja. A  $G$  legnagyobb klikkjének méretét  $\omega(G)$  jelöli. (Azaz  $\omega(G) = k$ , ha  $G$ -ben van  $k$  csúcs, melyek közt az összes él be van húzva, de  $k + 1$  ilyen csúcs már nincs.)

**Def.:** A  $G$  gráf csúcsainak  $U$  részhalmaza *független ponthalmaz*, ha  $U$  nem feszít élt, azaz  $U$ -nak semelyik két csúcsa sem szomszédos egymással. A legnagyobb független ponthalmaz méretét  $\alpha(G)$  jelöli.

**Mohó színezés:**  $G$  csúcsait egy rögzített sorrendben kiszínezzük úgy, hogy a soron következő  $v$  csúcs az első olyan színt kapja, amely nem fordul elő  $v$  már megszínezett szomszédainál.

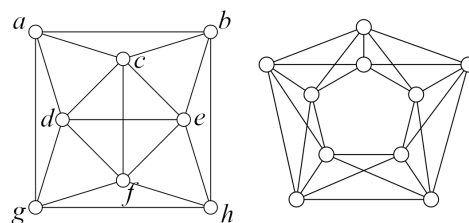
**Megfigyelés:** Ha  $v$  foka  $d(v)$ , akkor a mohó színezésnél  $v$  színe az  $\{1, 2, \dots, d(v) + 1\}$  halmazból kerül ki (hiszen  $v$ -nél legfeljebb  $d(v)$  szín lehet tilos).

**Áll.:** Ha  $G$  véges, egyszerű, akkor  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$  ( $\Delta(G)$  jelöli a  $G$ -ben előforduló legnagyobb fokszámot).

## Gyakorlatok

1. Mennyi az ábrán látható két gráf kromatikus száma?

2. Állapítsuk meg, hány szín kell a bal oldali ábrán látható  $G$  gráf  $a, b, c, d, e, f, g, h$  sorrendben történő mohó színezéséhez. Milyen színt kap ekkor a  $h$  csúcs?



3. **a)** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $G$  gráf csúcsait alkalmas sorrendben mohón színezve pontosan  $\chi(G)$  színt használunk fel. **b)** Mutassunk példát olyan  $2n$  csúcsú  $G$  gráfra, melyre  $\chi(G) = 2$ , de a csúcsok peches sorrendje esetén a mohó színezés  $n$  színt használ.

4. Bergengóciában néhány rádiócsatorna szeretne frekvenciákat kapni műsorainak sugárzásához. A Bergengóc Kommunikációs Hatóság (BKH) felügyeli a frekvenciák kiosztását. Hogy ne zavarják egymást, két műsorszóró állomás csak akkor használhatja ugyanazon frekvenciát, ha legalább 200 km-re vannak egymástól. A BKH szeretné a lehető legkevesebb frekvenciát használni. Adjunk gráfelméleti modellt a minimálisan szükséges frekvenciák számának meghatározásához.

5. A  $G$  gráf csúcsait a sakktábla mezői, éleit pedig a huszár (bástya, futó, király) lehetséges lépései alkotják. Mennyi a  $G$  gráf  $\chi(G)$  kromatikus száma?

6. Van-e olyan gráf, amiben nincs  $K_3$  klikk, de  $G$  nem színezhető ki 2 színnel? Hát olyan, melyben nincs  $K_4$  klikk, de mégsem színezhető ki 3 színnel?

7. Legyen  $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ , és legyen  $ij \in E(G)$ , ha  $|i - j| \leq 7$ . Mennyi az így meghatározott  $G$  gráf  $\chi(G)$  kromatikus száma?

8. A  $G$  gráf két komponensből áll, ezek  $K$  és  $H$ . Legyen  $G'$  az a gráf, amit  $G$ -ből úgy kapunk, hogy  $K$  minden pontját összekötjük  $H$  minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy **a)**  $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ; **b)**  $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$ .

9. Igazoljuk, hogy ha  $G$  egyszerű gráf, akkor  $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$ .

10. Maximum mennyi lehet egy legfeljebb 100-élű egyszerű gráf kromatikus száma?

11. Legfeljebb hány éle lehet annak az  $n$  csúcsú  $G$  gráfnak, amire  $\chi(G) \leq 2$ ? És ha  $\chi(G) \leq 3$ ?

12. Tegyük fel, hogy a  $G$  egyszerű gráfba bárhogyan is húzunk be egy  $e$  élt az egyszerűség megtartásával,  $\chi(G) < \chi(G + e)$  teljesül a kapott gráf kromatikus számára. Bizonyítsuk be, hogy a mohó színezés  $G$  színezéséhez minden esetben  $\chi(G)$  színt használ.

13. Legyen  $G$  egy  $n$  pontú egyszerű gráf, melynek maximális klikkmérete  $\omega(G) = 2$  és kromatikus száma  $\chi(G) = k$ . Képezzük a  $G'$  gráfot úgy, hogy lerajzoljuk a  $G$  gráf  $k$  diszjunkt példányát, és felvesszünk még  $n^k$  további pontot pontot. Minden ilyen pontnak  $G$  minden egyes példányából 1 – 1 szomszédja lesz, mégpedig úgy, hogy ne legyen két ilyen pontnak azonos a szomszédja. Mutassuk meg, hogy  $\omega(G') = 2$ , valamint, hogy  $\chi(G') = \chi(G) + 1 = k + 1$  teljesül.

14. Igazoljuk Mycielski tételét, miszerint tetszőleges  $k \geq 2$  egészre létezik olyan  $G_k$  gráf, melyre  $\chi(G_k) = k$  és  $\omega(G_k) = 2$ .

15\*. Bizonyítsuk be, hogy ha  $G$  egyértelműen színezhető 3-színnel (azaz  $G$  bármely 3-színezéséből bármely másik 3-színezése megkapható a színek cseréjével), akkor  $|E(G)| \geq 2|V(G)| - 3$ .