Kombinatorikus optimalizálás

Közelítő algoritmusok, ütemezési problémák

2023. május 9.

Bevezetés

A mai órán olyan feladatokról lesz szó, amelyeknek az optimális megoldására nincs hatékony algoritmus. Sok esetben nincs szükség azonban optimumra, elég, ha az algoritmus egy optimumhoz kellően közeli megoldást talál. Ezt a lehetőséget kihasználva esetleg tudunk olyan algoritmust tervezni, ami igen gyorsan fut, mégis egész jól használható eredményt ad.

Bevezetés

A mai órán olyan feladatokról lesz szó, amelyeknek az optimális megoldására nincs hatékony algoritmus. Sok esetben nincs szükség azonban optimumra, elég, ha az algoritmus egy optimumhoz kellően közeli megoldást talál. Ezt a lehetőséget kihasználva esetleg tudunk olyan algoritmust tervezni, ami igen gyorsan fut, mégis egész jól használható eredményt ad.
Feltesszük, hogy az algoritmusunk célja egy $f(x)$ célfüggvény minimalizálása egy, az I inputtól függő X_I megoldáshalmazon.

Bevezetés

A mai órán olyan feladatokról lesz szó, amelyeknek az optimális megoldására nincs hatékony algoritmus. Sok esetben nincs szükség azonban optimumra, elég, ha az algoritmus egy optimumhoz kellően közeli megoldást talál. Ezt a lehetőséget kihasználva esetleg tudunk olyan algoritmust tervezni, ami igen gyorsan fut, mégis egész jól használható eredményt ad.
Feltesszük, hogy az algoritmusunk célja egy $f(x)$ célfüggvény minimalizálása egy, az I inputtól függő X_I megoldáshalmazon. Például, ha az I input egy G gráf, az X_I megoldáshalmaz a G csúcsszínezéseinek halmaza, és a célfüggvény értéke a felhasznált színek száma, akkor az optimális megoldás egy $\chi(G)$ színnel történő kiszínezése. Erre a színezési feladatra hatékony algoritmus pl a mohó színezés, ami általában nem ad optimális eredményt.

Bevezetés

A mai órán olyan feladatokról lesz szó, amelyeknek az optimális megoldására nincs hatékony algoritmus. Sok esetben nincs szükség azonban optimumra, elég, ha az algoritmus egy optimumhoz kellően közeli megoldást talál. Ezt a lehetőséget kihasználva esetleg tudunk olyan algoritmust tervezni, ami igen gyorsan fut, mégis egész jól használható eredményt ad.
Feltesszük, hogy az algoritmusunk célja egy $f(x)$ célfüggvény minimalizálása egy, az I inputtól függő X_I megoldáshalmazon. Például, ha az I input egy G gráf, az X_I megoldáshalmaz a G csúcsszínezéseinek halmaza, és a célfüggvény értéke a felhasznált színek száma, akkor az optimális megoldás egy $\chi(G)$ színnel történő kiszínezése. Erre a színezési feladatra hatékony algoritmus pl a mohó színezés, ami általában nem ad optimális eredményt.
Vagy ha az I input egy G gráf és annak $u, v \in V(G)$ csúcsai valamint egy ℓ hosszfüggvény G élein, az X_I megoldáshalmazt pedig a G-beli uv-utak alkotják, akkor $f(x)$ lehet az x út hossza. Itt az optimális megoldás egy legrövidebb uv-út lesz.

Közelítő algoritmusok

Def: Tfh a Π problémában az f (nemnegatív) függvényt kell minimalizálni az I inputhoz tartozó X_I megoldáshalmazon. Tfh az A algoritmus tetszőleges inputra egy $A(I) \in X_I$ megoldást talál. Ekkor az A algoritmus **abszolút/additív hibája** C, ha $f(A(I)) \leq min\{f(x) : x \in X_I\} + C$ teljesül minden I inputra.

Közelítő algoritmusok

Def: Tfh a Π problémában az f (nemnegatív) függvényt kell minimalizálni az I inputhoz tartozó X_I megoldáshalmazon. Tfh az A algoritmus tetszőleges inputra egy $A(I) \in X_I$ megoldást talál. Ekkor az A algoritmus **abszolút/additív hibája** C, ha $f(A(I)) \leq min\{f(x) : x \in X_I\} + C$ teljesül minden I inputra. Az A algoritmus **relatív/multiplikatív hibája** α, ha minden I inputra $f(A(I)) \leq \alpha \cdot min\{f(x) : x \in X_I\}$ teljesül. Az ilyen A egy **α-közelítő algoritmus** a Π problémára.

Közelítő algoritmusok

Def: Tfh a Π problémában az f (nemnegatív) függvényt kell minimalizálni az I inputhoz tartozó X_I megoldáshalmazon. Tfh az A algoritmus tetszőleges inputra egy $A(I) \in X_I$ megoldást talál. Ekkor az A algoritmus **abszolút/additív hibája** C, ha $f(A(I)) \leq min\{f(x) : x \in X_I\} + C$ teljesül minden I inputra.
Az A algoritmus **relatív/multiplikatív hibája** α, ha minden I inputra $f(A(I)) \leq \alpha \cdot min\{f(x) : x \in X_I\}$ teljesül.
Az ilyen A egy **α-közelítő algoritmus** a Π problémára.

Megj: Ha a Π problémában maximalizálni (és nem minimalizálni) kell az f célfüggvényt, akkor $f(A(I)) \geq \max\{f(x) : x \in X_I\} - C$ ill. $f(A(I)) \geq \alpha \cdot max\{f(x) : x \in X_I\}$ segítségével definiáljuk az abszolút ill. relatív hibát.

Példák

Példa: (1) Ismert olyan algoritmus, ami tetsz. G síkgráfot legfeljebb 5 színnel kiszínez, de ha G-ben nincs háromszög, akkor legfeljebb 4-gyel, ha pedig G páros, akkor $\leq$ 2-vel. Mivel minden síkgráfhoz elég 4 szín, ezért az algoritmus abszolút hibája 2.

Példák

Példa: (1) Ismert olyan algoritmus, ami tetsz. G síkgráfot legfeljebb 5 színnel kiszínez, de ha G-ben nincs háromszög, akkor legfeljebb 4-gyel, ha pedig G páros, akkor ≤ 2-vel. Mivel minden síkgráfhoz elég 4 szín, ezért az algoritmus abszolút hibája 2.
(2) Vizing tétele szerint ha G egyszerű gráf, akkor élkromatikus száma legfeljebb eggyel több a maximális fokszámánál: $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Ismert olyan algoritmus, ami bármely ilyen G-t kiszínez kiszínez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színnel. A triviális $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ egyenlőtlenség miatt ennek az algoritmusnak az abszolút hibája 1.

Példák

Példa: (1) Ismert olyan algoritmus, ami tetsz. G síkgráfot legfeljebb 5 színnel kiszínez, de ha G-ben nincs háromszög, akkor legfeljebb 4-gyel, ha pedig G páros, akkor ≤ 2-vel. Mivel minden síkgráfhoz elég 4 szín, ezért az algoritmus abszolút hibája 2.
(2) Vizing tétele szerint ha G egyszerű gráf, akkor élkromatikus száma legfeljebb eggyel több a maximális fokszámánál: $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Ismert olyan algoritmus, ami bármely ilyen G-t kiszínez kiszínez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színnel. A triviális $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ egyenlőtlenség miatt ennek az algoritmusnak az abszolút hibája 1.

Állítás: Gráf minimális méretű lefogó ponthalmazának keresésére van polinomidejű 2-közelítő algoritmus.

Példák

Példa: (1) Ismert olyan algoritmus, ami tetsz. G síkgráfot legfeljebb 5 színnel kiszínez, de ha G-ben nincs háromszög, akkor legfeljebb 4-gyel, ha pedig G páros, akkor ≤ 2-vel. Mivel minden síkgráfhoz elég 4 szín, ezért az algoritmus abszolút hibája 2.
(2) Vizing tétele szerint ha G egyszerű gráf, akkor élkromatikus száma legfeljebb eggyel több a maximális fokszámánál: $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Ismert olyan algoritmus, ami bármely ilyen G-t kiszínez kiszínez legfeljebb $\Delta(G) + 1$ színnel. A triviális $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ egyenlőtlenség miatt ennek az algoritmusnak az abszolút hibája 1.

Állítás: Gráf minimális méretű lefogó ponthalmazának keresésére van polinomidejű 2-közelítő algoritmus.

Biz: Válasszunk G-ből pként diszjunkt éleket amíg tudunk. Ha k él választása után nem tudunk többet választani, akkor a talált k él $2k$ végpontja lefogó ponthalmazt alkot. Másrészt az így megtalált k él lefogásához legalább k csúcsra van szükség, ezért $\tau(G) \geq k$, azaz $f(A(G)) = 2k \geq 2 \cdot \tau(G) = 2 \cdot \min\{f(x) : x \in X_G\}$. □

Egy nemapproximálható feladat

Állítás: Ha $P \neq NP$[1], akkor nincs olyan polinomidejű A algoritmus, ami tetszőleges G gráfra C abszolút hibával talál közelítést G leghosszabb köréhez.

[1] azaz ha a világ olyan, amilyennek képzeljük

Egy nemapproximálható feladat

Állítás: Ha $P \neq NP$[1], akkor nincs olyan polinomidejű A algoritmus, ami tetszőleges G gráfra C abszolút hibával talál közelítést G leghosszabb köréhez.

Biz: Megmutatjuk, hogy ha van polinomidejű, C additív hibájú közelítés, akkor ebből kaphatunk olyan polinomidejű algoritmust, ami tetszőleges G inputgráfról polinomidőben eldönti, van-e Hamilton-útja. Márpedig ha $P \neq NP$, akkor nincs ilyen algoritmus.
Helyettesítsük G minden élét egy-egy $C+1$ élt tartalmazó úttal úgy, hogy minden élre C új csúcsot ültetünk. Ha G-nek van Hamilton-köre, akkor G'-ben lesz $(C+1)n$ élű kör, másrészt G' bármely körének hossza $C+1$ többszöröse. Ezért ha G' egy köre rövidebb $(C+1)n$-nél, akkor az legfeljebb $(C+1)n-(C+1)$ élt tartalmaz. Ezért ha G-nek van Hamilton-köre, akkor a C additív hibájú közelítésnek G'-ben egy G egy $(C+1)n$ élű kört kell találnia, ami csakis G egy Hamilton-köréből származhat. □

[1] azaz ha a világ olyan, amilyennek képzeljük

A halmazfedési probléma közelítése

Halmazfedési probléma **Input:** Az U n-elemű alaphalmaz $S_1, S_2, \ldots, S_k \subseteq U$ részhalmazai, és a $c(S_i)$ nemnegatív költségek.
Cél: U minimális összköltségű fedése S_i-kkel.

A halmazfedési probléma közelítése

Halmazfedési probléma **Input:** Az U n-elemű alaphalmaz $S_1, S_2, \ldots, S_k \subseteq U$ részhalmazai, és a $c(S_i)$ nemnegatív költségek.
Cél: U minimális összköltségű fedése S_i-kkel.

Mohó algoritmus Egymás után választjuk a fedésbe az $S^1, S^2, \ldots$ részhalmazokat. Mindig azt a halmazt választjuk,

A halmazfedési probléma közelítése

Halmazfedési probléma **Input:** Az U n-elemű alaphalmaz $S_1, S_2, \ldots, S_k \subseteq U$ részhalmazai, és a $c(S_i)$ nemnegatív költségek. **Cél:** U minimális összköltségű fedése S_i-kkel.

Mohó algoritmus Egymás után választjuk a fedésbe az $S^1, S^2, \ldots$ részhalmazokat. Mindig azt a halmazt választjuk, amelyik fajlagosan a legolcsóbban fedi az eddig le nem fedett pontokat, azaz azt az S^i-t, amire $c(S^i)/m$ minimális, ahol m az S^i által lefedett, de az eddig választott halmazok által le nem fedett U-beli elemek száma: $m = |S^i \setminus (S^1 \cup S^2 \cup \ldots \cup S^{i-1})|$.

A halmazfedési probléma közelítése

Halmazfedési probléma **Input:** Az U n-elemű alaphalmaz $S_1, S_2, \ldots, S_k \subseteq U$ részhalmazai, és a $c(S_i)$ nemnegatív költségek.
Cél: U minimális összköltségű fedése S_i-kkel.

Mohó algoritmus Egymás után választjuk a fedésbe az $S^1, S^2, \ldots$ részhalmazokat. Mindig azt a halmazt választjuk, amelyik fajlagosan a legolcsóbban fedi az eddig le nem fedett pontokat, azaz azt az S^i-t, amire $c(S^i)/m$ minimális, ahol m az S^i által lefedett, de az eddig választott halmazok által le nem fedett U-beli elemek száma: $m = |S^i \setminus (S^1 \cup S^2 \cup \ldots \cup S^{i-1})|$.

Példa: $S = \{\{1,2,3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2\}, \{1\}\}$.

$c(1234) = 10$	$c(124) = 6$	$c(134) = 4$	$c(12) = 3$	$c(1) = 1$
$2,5$	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\boxed{1}$
$\frac{10}{3}$	3	$\boxed{2}$	3	$-$
10	6	$-$	$\boxed{3}$	

A halmazfedési probléma közelítése

Halmazfedési probléma **Input:** Az U n-elemű alaphalmaz $S_1, S_2, \ldots, S_k \subseteq U$ részhalmazai, és a $c(S_i)$ nemnegatív költségek. **Cél:** U minimális összköltségű fedése S_i-kkel.

Mohó algoritmus Egymás után választjuk a fedésbe az $S^1, S^2, \ldots$ részhalmazokat. Mindig azt a halmazt választjuk, amelyik fajlagosan a legolcsóbban fedi az eddig le nem fedett pontokat, azaz azt az S^i-t, amire $c(S^i)/m$ minimális, ahol m az S^i által lefedett, de az eddig választott halmazok által le nem fedett U-beli elemek száma: $m = |S^i \setminus (S^1 \cup S^2 \cup \ldots \cup S^{i-1})|$.

A halmazfedési probléma közelítése

Halmazfedési probléma **Input:** Az U n-elemű alaphalmaz $S_1, S_2, \ldots, S_k \subseteq U$ részhalmazai, és a $c(S_i)$ nemnegatív költségek. **Cél:** U minimális összköltségű fedése S_i-kkel.

Mohó algoritmus Egymás után választjuk a fedésbe az $S^1, S^2, \ldots$ részhalmazokat. Mindig azt a halmazt választjuk, amelyik fajlagosan a legolcsóbban fedi az eddig le nem fedett pontokat, azaz azt az S^i-t, amire $c(S^i)/m$ minimális, ahol m az S^i által lefedett, de az eddig választott halmazok által le nem fedett U-beli elemek száma: $m = |S^i \setminus (S^1 \cup S^2 \cup \ldots \cup S^{i-1})|$.

A Mohó algoritmus analízise Legyen OPT az optimális fedés összköltsége. Thf U elemeit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sorrendben fedjük. Mivel az $U \setminus \{u_1, \ldots, u_{i-1}\}$ elemeket OPT ktg-gel le lehet fedni, ezért u_i fedésének fajl. költsége legfeljebb $\leq OPT/(n-i+1)$. Így az output fedés összköltsége legfeljebb $OPT \cdot (1/n + 1/(n-1) + \ldots + 1/1) \leq OPT \cdot (1 + lnn)$.

A halmazfedési probléma közelítése

Halmazfedési probléma **Input:** Az U n-elemű alaphalmaz $S_1, S_2, \ldots, S_k \subseteq U$ részhalmazai, és a $c(S_i)$ nemnegatív költségek. **Cél:** U minimális összköltségű fedése S_i-kkel.

Mohó algoritmus Egymás után választjuk a fedésbe az $S^1, S^2, \ldots$ részhalmazokat. Mindig azt a halmazt választjuk, amelyik fajlagosan a legolcsóbban fedi az eddig le nem fedett pontokat, azaz azt az S^i-t, amire $c(S^i)/m$ minimális, ahol m az S^i által lefedett, de az eddig választott halmazok által le nem fedett U-beli elemek száma: $m = |S^i \setminus (S^1 \cup S^2 \cup \ldots \cup S^{i-1})|$.

A Mohó algoritmus analízise Legyen OPT az optimális fedés összköltsége. Thf U elemeit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sorrendben fedjük. Mivel az $U \setminus \{u_1, \ldots, u_{i-1}\}$ elemeket OPT ktg-gel le lehet fedni, ezért u_i fedésének fajl. költsége legfeljebb $\leq OPT/(n-i+1)$. Így az output fedés összköltsége legfeljebb $OPT \cdot (1/n + 1/(n-1) + \ldots + 1/1) \leq OPT \cdot (1 + lnn)$.

Megj: A polinomidejű algoritmusok között nem létezik, ami a most igazolt $konst \cdot lnn$-approximációnál lényegesen jobban közelít.

Ütemezési problémák

A kombinatorikus optimalizálás egy fontos, sokat kutatott részterülete az ütemezéselmélet. Itt a célfüggvény optimalizálásához a rendelkezésre álló feladatok (alkalmas részhalmazának) elvégzésének módját kell meghatározni. Néhány alapfeladattal kapcsolatos egyszerű eredmény mutatunk be a mai alkalommal.

Ütemezési problémák

Input: $J_1, J_2, \ldots$ munkák p_i megmunkálási idők, gépek m száma.
Feladat: A munkák gépekre ütemezése. Egy S ütemezésre $S_t(i)$ és $S_M(i)$ adja meg, hogy J_i-t mikor és melyik gépen kell elkezdeni. $C_i^S = S_t(i) + p(i)$ a J_i befejezési időpontja, $C_{max}^S = \max_i C_i^S$ pedig az S ütemezés átfutási ideje.
Megkötések: A gépek egyformák (ebben a tárgyalásban).
Egy gépen egyszerre egy munka végezhető.
Minden munkát megszakítás nélkül kell elvégezni.
Lehetséges feltételek J_i-kre: r_i (rendelkezésre állási idő), w_i (súly), d_i (határidő), $\prec$ (precedencia)
Optimalizálandó mennyiségek: C_{max}^S, $(\sum_i C_i^S)/n$
Tömör jelölés: $\alpha|\beta|\gamma$, ahol
$\alpha \in \{1, Pm, P\}$ (1 gép, m, ill. végtelen sok párhuzamos gép)
$\beta \subseteq \{p \equiv 1, r_i, d_j, \prec\}$ (feltételek megadása)
$\gamma \in \{C_{max}, \sum_i C_i, \sum_i w_i C_i\}$ (célfv megadása)
PI: (1) $1||C_{max}$: 1 gépen kell mihamarabb végezni. $OPT = \sum_i p_i$.
(2) $1|\prec|C_{max}$. Nem mindegy a sorrend, de itt is $OPT = \sum_i p_i$.

Az SPT sorrend optimalitása

Tétel: Az $1||\sum_i C_i$ feladatra optimális megoldás a munkák p_i szerint növekvő sorrendben történő ütemezése.

Az SPT sorrend optimalitása

Tétel: Az $1||\sum_i C_i$ feladatra optimális megoldás a munkák p_i szerint növekvő sorrendben történő ütemezése.

Biz: Ha $J_1, J_2, \ldots, J_n$ sorrendben ütemezünk, akkor $\sum_{i=1}^{n} C_i^S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} p_j = \sum_{1 \le j \le i \le n} p_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} p_j = \sum_{j=1}^{n} (n+1-j)p_j = np_1 + (n-1)p_2 + \ldots + 2p_{n-1} + 1p_n$, és ez akkor minimális, ha $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n$. □

Az SPT sorrend optimalitása

Tétel: Az $1||\sum_i C_i$ feladatra optimális megoldás a munkák p_i szerint növekvő sorrendben történő ütemezése.

Biz: Ha $J_1, J_2, \ldots, J_n$ sorrendben ütemezünk, akkor $\sum_{i=1}^{n} C_i^S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} p_j = \sum_{1 \le j \le i \le n} p_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} p_j = \sum_{j=1}^{n} (n+1-j)p_j = np_1 + (n-1)p_2 + \ldots + 2p_{n-1} + 1p_n$, és ez akkor minimális, ha $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n$. □

Tétel: Az $1||\sum_i w_i C_i$ feladatra optimális megoldás a munkák p_i/w_i szerint növekvő sorrendben történő ütemezése.

Az SPT sorrend optimalitása

Tétel: Az $1||\sum_i C_i$ feladatra optimális megoldás a munkák p_i szerint növekvő sorrendben történő ütemezése.

Biz: Ha $J_1, J_2, \ldots, J_n$ sorrendben ütemezünk, akkor $\sum_{i=1}^{n} C_i^S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} p_j = \sum_{1 \le j \le i \le n} p_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} p_j = \sum_{j=1}^{n} (n+1-j)p_j = np_1 + (n-1)p_2 + \ldots + 2p_{n-1} + 1p_n$, és ez akkor minimális, ha $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n$. □

Tétel: Az $1||\sum_i w_i C_i$ feladatra optimális megoldás a munkák p_i/w_i szerint növekvő sorrendben történő ütemezése.

Biz: Ha $J_1, J_2, \ldots, J_n$ sorrendben ütemezünk, akkor $\sum_{i=1}^{n} w_i C_i^S = \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{j=1}^{i} p_j = \sum_{1 \le j \le i \le n} w_i p_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} w_i p_j$, és ha $p_i/w_i > p_{i+1}/w_{i+1}$ (azaz $p_i w_{i+1} > p_{i+1} w_i$), akkor J_i és J_{i+1} cseréjétől a célfüggvény értéke csökken. Egymást követő munkák cseréjével a célfüggvény értékét csökkentve előbb-utóbb a tételben szereplő ütemezés adódik. □

A $P2||C_{max}$ probléma

Állítás: A $P2||C_{max}$ probléma optimális megoldása reménytelen.

A $P2||C_{max}$ probléma

Állítás: A $P2||C_{max}$ probléma optimális megoldása reménytelen.

Def: A PARTÍCIÓ problémában az inputként megadott $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ nemnegatív egészekről kell eldönteni, hogy a 0 előállítható-e $0 = \pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$ formában.

Lemma: A PARTÍCIÓ probléma megoldása reménytelen. (Pontosabban: a PARTÍCIÓ probléma NP-teljes. Ha hatékonyan (polinom időben) megoldható lenne, akkor volna hatékony algoritmus egy olyan problémára is, amire úgy hisszük, nincs.)

A $P2||C_{\max}$ probléma

Állítás: A $P2||C_{\max}$ probléma optimális megoldása reménytelen.

Def: A PARTÍCIÓ problémában az inputként megadott $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ nemnegatív egészekről kell eldönteni, hogy a 0 előállítható-e $0 = \pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$ formában.

Lemma: A PARTÍCIÓ probléma megoldása reménytelen. (Pontosabban: a PARTÍCIÓ probléma NP-teljes. Ha hatékonyan (polinom időben) megoldható lenne, akkor volna hatékony algoritmus egy olyan problémára is, amire úgy hisszük, nincs.)

Biz: Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ a PARTÍCIÓ probléma tetszőleges inputja. Készítsünk ütemezési problémát két gépre n munkával úgy, hogy $p_i = a_i$ az i-dik job megmunkálási ideje. Ekkor $C_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i$ pontosan akkor teljesük, ha a két gép folyamatos munka mellett egyszerre tud végezni. Ez pedig pontosan akkor van így, ha a PARTÍCIÓ problémában a 0 előállítható a kívánt alakban. Ha tehát volna optimálisan ütemező polinomidejű algoritmus, akkor polinomidőben tudnánk megoldani egy NP-teljes problémát, de ez reménytelen. □

Listás ütemezés $Pm||C_{\max}$ esetén

LS algoritmus Az m gépen, $J_1, J_2, \ldots, J_n$ sorrendben végezzük el a munkákat, minden munkát az elsőnek felszabaduló gépen.

Listás ütemezés $Pm||C_{\max}$ esetén

LS algoritmus Az m gépen, $J_1, J_2, \ldots, J_n$ sorrendben végezzük el a munkákat, minden munkát az elsőnek felszabaduló gépen.

Tétel: A $Pm||C_{\max}$ feladatra LS egy $(2 - \frac{1}{m})$-approximáció.

Listás ütemezés $Pm||C_{\max}$ esetén

LS algoritmus Az m gépen, $J_1, J_2, \ldots, J_n$ sorrendben végezzük el a munkákat, minden munkát az elsőnek felszabaduló gépen.

Tétel: A $Pm||C_{\max}$ feladatra LS egy $(2 - \frac{1}{m})$-approximáció.

Biz: Jelölje $C^*_{\max}$ az optimális átfutási időt. Világos, hogy $C^*_{\max} \geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} p_i$ ill. $C^*_{\max} \geq \max_i p_i$. Legyen t az LS szerint utolsónak befejezett J_k munka kezdési időpontja. Ekkor 0-tól t-ig mind az m gép dolgozik, tehát $t = C^{LS}_{\max} - p_k \leq \frac{1}{m} \sum_{i \neq k} p_i$, ezért $C^{LS}_{\max} = t + p_k \leq \frac{1}{m} \sum_{i \neq k} p_i + p_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} p_i + (1 - \frac{1}{m}) p_k \leq C^*_{\max} + (1 - \frac{1}{m}) C^*_{\max} = (2 - \frac{1}{m}) C^*_{\max}$. □

Listás ütemezés $Pm||C_{\max}$ esetén

LS algoritmus Az m gépen, $J_1, J_2, \ldots, J_n$ sorrendben végezzük el a munkákat, minden munkát az elsőnek felszabaduló gépen.

Tétel: A $Pm||C_{\max}$ feladatra LS egy $(2 - \frac{1}{m})$-approximáció.

Biz: Jelölje $C^*_{\max}$ az optimális átfutási időt. Világos, hogy $C^*_{\max} \geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} p_i$ ill. $C^*_{\max} \geq \max_i p_i$. Legyen t az LS szerint utolsónak befejezett J_k munka kezdési időpontja. Ekkor 0-tól t-ig mind az m gép dolgozik, tehát $t = C^{LS}_{\max} - p_k \leq \frac{1}{m} \sum_{i \neq k} p_i$, ezért $C^{LS}_{\max} = t + p_k \leq \frac{1}{m} \sum_{i \neq k} p_i + p_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} p_i + (1 - \frac{1}{m}) p_k \leq C^*_{\max} + (1 - \frac{1}{m}) C^*_{\max} = (2 - \frac{1}{m}) C^*_{\max}$. □

Tétel: A $Pm||C_{\max}$ feladatra az LS ütemezés p_i szerint csökkenő (LPT) sorrendben végezése $\frac{4}{3}$-approximációs algoritmust ad. □

A ládapakolási probléma

Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

A ládapakolási probléma

Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

A ládapakolási probléma

Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

A ládapakolási probléma

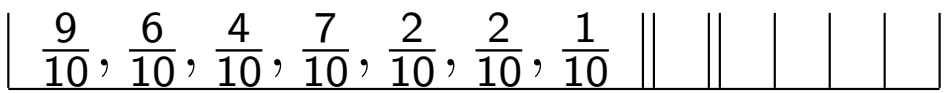
Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FF:



A ládapakolási probléma

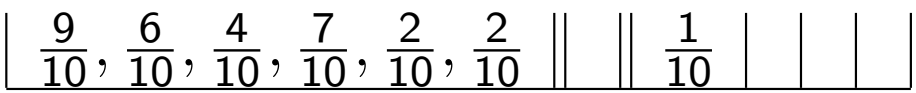
Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FF:



A ládapakolási probléma

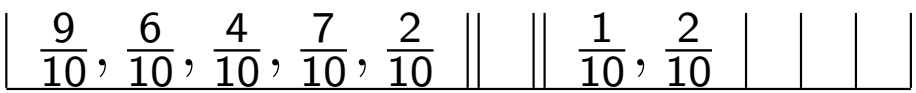
Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FF:



A ládapakolási probléma

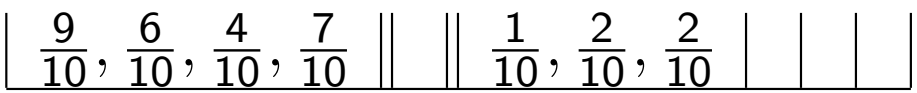
Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FF:



A ládapakolási probléma

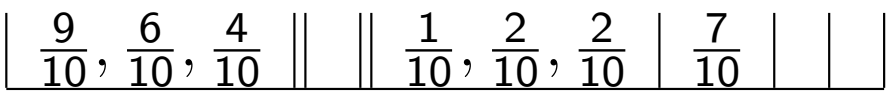
Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FF:



A ládapakolási probléma

Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FF:

$\left| \frac{9}{10}, \frac{6}{10} \right\| \quad \| \left| \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{4}{10} \right| \frac{7}{10} \left| \quad \right| \quad \left|$

A ládapakolási probléma

Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FF:

$$\left| \frac{9}{10} \right\| \quad \| \left| \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{4}{10} \right| \frac{7}{10} \left| \frac{6}{10} \right| \quad \Big|$$

A ládapakolási probléma

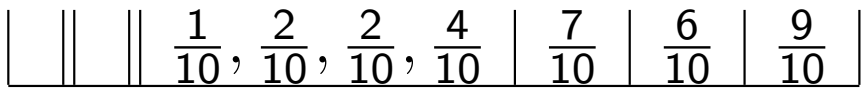
Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FF: $k = 4$



A ládapakolási probléma

Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa:

A ládapakolási probléma

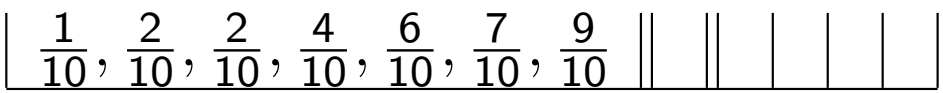
Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FFD:



A ládapakolási probléma

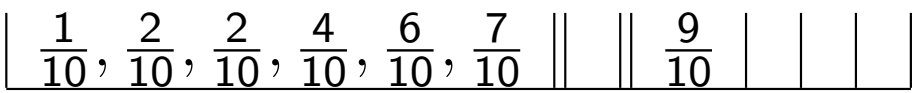
Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FFD:



A ládapakolási probléma

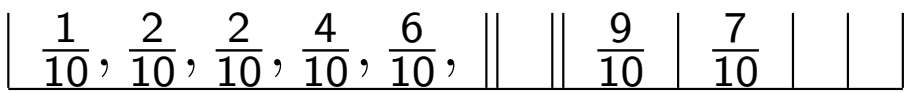
Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FFD:



A ládapakolási probléma

Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FFD:

A ládapakolási probléma

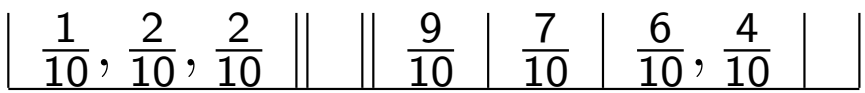
Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FFD:



A ládapakolási probléma

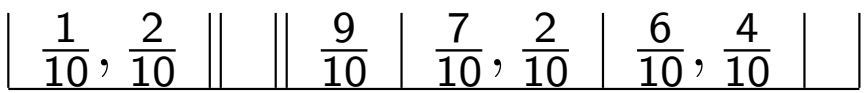
Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FFD:



A ládapakolási probléma

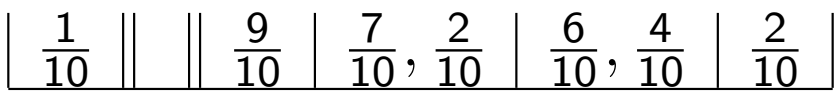
Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FFD:



A ládapakolási probléma

Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Példa: FFD: $k = 4$

		$\frac{9}{10}, \frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}, \frac{2}{10}$	$\frac{6}{10}, \frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$

A ládapakolási probléma

Def: A **ládapakolási** (bin packing) problémában adott $a_1, a_2, \ldots, a_n$ méretű tárgyakat kell a lehető legkevesebb ládába elpakolni, ahol egy ládában a tárgyak összmérete legfeljebb 1 lehet.

Megj: A ládapakolási feladat felfogható olyan inverz ütemezési problémaként, ahol $C_{\max} \leq 1$ feltétel mellett minimális számú géppel kell elvégezni a $J_1, \ldots, J_n$ munkákat.

FF algoritmus A tárgyakat érkezési sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

FFD algoritmus A tárgyakat méret szerint csökkenő sorrendben pakoljuk a ládákba, mindegyiket a legelső olyanba, amelyikbe belefér.

Tétel: Ha a ládapakolási feladat egy inputjához k láda elegendő, akkor az FF algoritmus legfeljebb $\lfloor \frac{17}{10} k \rfloor$, az FFD pedig legfeljebb $\frac{11k+6}{9} k$ ládát használ.
(Az FF lényegében $1,7$-, az FFD $1,22$-közelítő algoritmus.) □

Mit tanultunk ma?

Mit tanultunk ma?

- Algoritmus outputjának additív ill. multiplikatív hibája az optimális megoldáshoz képest.

Mit tanultunk ma?

- Algoritmus outputjának additív ill. multiplikatív hibája az optimális megoldáshoz képest.
- Közelítő algoritmus a kromatikus számra ill. a lefogó ponthalmazra

Mit tanultunk ma?

- Algoritmus outputjának additív ill. multiplikatív hibája az optimális megoldáshoz képest.
- Közelítő algoritmus a kromatikus számra ill. a lefogó ponthalmazra
- Mohó közelítő algoritmus a halmazfedési problémára

Mit tanultunk ma?

- Algoritmus outputjának additív ill. multiplikatív hibája az optimális megoldáshoz képest.
- Közelítő algoritmus a kromatikus számra ill. a lefogó ponthalmazra
- Mohó közelítő algoritmus a halmazfedési problémára
- Munkák ütemezése párhuzamosan futó gépekre, ütemezés fogalma, megmunkálási idő, átfutási idő, ütemezéshez kapcsolódó feltételek, optimalizálandó mennyiségek

Mit tanultunk ma?

- Algoritmus outputjának additív ill. multiplikatív hibája az optimális megoldáshoz képest.
- Közelítő algoritmus a kromatikus számra ill. a lefogó ponthalmazra
- Mohó közelítő algoritmus a halmazfedési problémára
- Munkák ütemezése párhuzamosan futó gépekre, ütemezés fogalma, megmunkálási idő, átfutási idő, ütemezéshez kapcsolódó feltételek, optimalizálandó mennyiségek
- SPT sorrend optimalitása az átlagos befejezési időre egy gépen

Mit tanultunk ma?

- Algoritmus outputjának additív ill. multiplikatív hibája az optimális megoldáshoz képest.
- Közelítő algoritmus a kromatikus számra ill. a lefogó ponthalmazra
- Mohó közelítő algoritmus a halmazfedési problémára
- Munkák ütemezése párhuzamosan futó gépekre, ütemezés fogalma, megmunkálási idő, átfutási idő, ütemezéshez kapcsolódó feltételek, optimalizálandó mennyiségek
- SPT sorrend optimalitása az átlagos befejezési időre egy gépen
- Közelítő algoritmus LS és LPT ütemezéssel

Mit tanultunk ma?

- Algoritmus outputjának additív ill. multiplikatív hibája az optimális megoldáshoz képest.
- Közelítő algoritmus a kromatikus számra ill. a lefogó ponthalmazra
- Mohó közelítő algoritmus a halmazfedési problémára
- Munkák ütemezése párhuzamosan futó gépekre, ütemezés fogalma, megmunkálási idő, átfutási idő, ütemezéshez kapcsolódó feltételek, optimalizálandó mennyiségek
- SPT sorrend optimalitása az átlagos befejezési időre egy gépen
- Közelítő algoritmus LS és LPT ütemezéssel
- Ládapakolás, FF és FFD algoritmusok

Mit tanultunk ma?

- Algoritmus outputjának additív ill. multiplikatív hibája az optimális megoldáshoz képest.
- Közelítő algoritmus a kromatikus számra ill. a lefogó ponthalmazra
- Mohó közelítő algoritmus a halmazfedési problémára
- Munkák ütemezése párhuzamosan futó gépekre, ütemezés fogalma, megmunkálási idő, átfutási idő, ütemezéshez kapcsolódó feltételek, optimalizálandó mennyiségek
- SPT sorrend optimalitása az átlagos befejezési időre egy gépen
- Közelítő algoritmus LS és LPT ütemezéssel
- Ládapakolás, FF és FFD algoritmusok

Éljen!