A Számítástudomány alapjai

1. pótZH javítókulcs (2015. 12. 07.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Az ébredő erő bemutatóját 7 mikulás nézi meg a krampuszával. Úgy szeretnének leülni egy 14 székből álló sorba, hogy ne üljön minden mikulás a saját krampusza mellett. Hányféleképp tehetik ezt meg? (A 7 mikulás és a 7 krampusz is egymástól jól megkülönböztető.)

   A 14 meselényt 14!-féleképp lehet a széksorba leültetni, (2 pont)
   és ebből a számból kell levonni azon ültetések számát, ahol minden mikulás a krampusza mellett ül. (2 pont)
   Rossz típusú ültetést úgy kapunk, hogy 7! féleképp sorba állítjuk a 7 mikulás-krampusz párt, (2 pont)
   majd minden párhoz kiválasztjuk a 2-féle sorrend valamelyikét, egymástól függetlenül, azaz 2^7-féleképp. (1 pont)
   Mivel a párok minden sorrendhez ugyanennyi pár-rendezés tartozik, ezért a rossz ülésrendek száma $7! \cdot 2^7$, (2 pont)
   a végső válasz tehát $14! - 7! \cdot 2^7$. (1 pont)

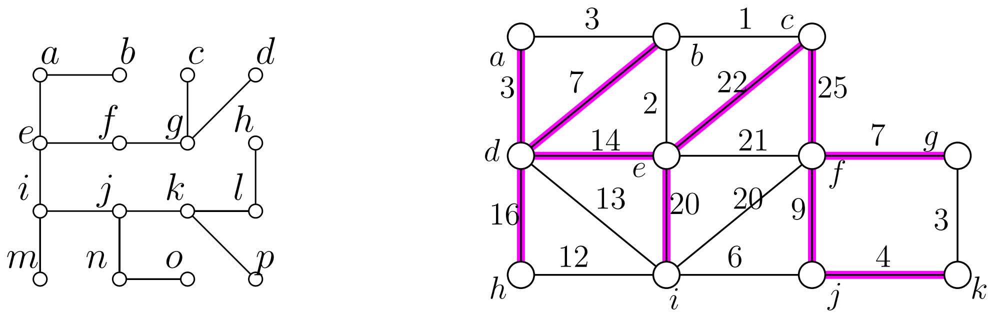
2. Igazoljuk, hogy ha v egy véges G gráf páratlan fokú csúcsa, akkor G-ben van olyan út, amely v-t a G egy másik páratlan fokú csúcsával köti össze.

   Legyen K a G gráfnak az a komponense, amely v-t tartalmazza. Az órán tanultak szerint a K gráfban a fokszámok összege megegyezik K élei számának kétszeresével, ezért K-ban a páratlan fokú csúcsok száma páros. (3 pont)
   Mivel v a K egy páratlan fokú pontja, ezért K-nak kell lennie v-n kívül még legalább egy másik páratlan fokú pontjának; legyen mondjuk u egy ilyen pont. (4 pont)
   Miután a v és u pontokat tartalmazó K gráf összefüggő (hisz a G egy komponense), ezért van K-ban (és így G-ben is) v-ből u-ba vezető út. Nekünk pedig pontosan egy ilyen út létezését kellett igazolnunk. (3 pont)

3. Tegyük fel, hogy a K_{2015} teljes gráf minden egyes élét kiszíneztük 1008 lehetséges szín valamelyikére. Bizonyítsuk be, hogy található a gráfnak egy u és egy v pontja valamint egy c szín úgy, hogy ne vezessen u-ból v-be olyan út amelynek minden éle c színű.

   Elegendő azt igazolni, hogy van olyan c szín, amelyre a c színű élek nem alkotnak összefüggő gráfot a K_{2015} csúcsain. (3 pont)
   A K_{2015} éleinek száma $\binom{2015}{2} = \frac{2015 \cdot 2014}{2}$, (1 pont)
   tehát az 1008 felhasznált szín között van olyan c szín, amelyet legfeljebb $\frac{2015 \cdot 2014}{1008 \cdot 2} = \frac{2015 \cdot 2014}{2016} < 2014$-szer használtunk fel. (2 pont)
   Márpedig ha egy bizonyos színű élek összefüggő gráfot alkotnak, akkor annak a gráfnak van feszítőfája is, (2 pont)
   és ennek a feszítőfának a tanultak szerint éppen $2015 - 1 = 2014$ éle van. (1 pont)
   Mivel az általunk választott c színnel 2014-nél kevesebb élt színeztünk meg, ezért a c színű élek alkotta gráf nem összefüggő, legalább két komponense van, és különböző komponensből választott csúcsok között nem vezethet út csupa c színű élen. Ezzel igazoltuk a feladat állítását. (1 pont)

4. A bal oldali ábrán látható az egyszerű, irányítatlan G gráf i gyökérből indított szélességi bejárása után kapott F feszítőfa. Tudjuk, hogy az e csúcs G-beli fokszáma 7. Határozzuk meg a G gráf e-ből induló éleit.



Azt tanították az órán, hogy a szélességi fa egyúttal a gyökeréből minden más csúcsba a bejárt gráf egy legrövidebb útját tartalmazza. Ez azt jelenti, hogy ha egy v csúcs a gyökértől k távolságban van a szélességi fán, akkor v csak a gyökértől $k-1$, k ill. $k+1$ távolságban lévő csúcsokkal lehet összekötve. (Más szóval a szélességi bejárás után nincs előreél). (3 pont)

Konkrétan az e csúcs a fában (és így G-ben is) 1 távolságra van i-től, ezért a szomszédai i-től G-ben (így a fában is) csakis $0, 1$ vagy 2 távolságra lehetnek. (3 pont)

A szóbajövő szomszédok tehát i, j, m, a, f, k és n, (3 pont)

ami éppen 7 csúcs, tehát $d(e) = 7$ miatt pontosan ezek az e csúcs szomszédai. A keresett élek tehát ei, ej, em, ea, ef, ek és en. (1 pont)

5. A jobb oldali ábrán látható G gráf éleire írt számok az adott él szélességét jelentik. Ha van, találjuk meg G-nek egy olyan F feszítőfáját, amelyben az F-beli uv-út a G egy legszélesebb uv-útja a G tetszőleges u, v csúcsaira. Határozzuk meg f és h között a legszélesebb út szélességét.

   Az órán azt tanultuk, hogy minden élszélességekkel ellátott irányítatlan gráfhoz van legszélesebb utak fája, és ez a Kruskal algoritmussal megtalálható, amennyiben az élekről csökkenő szélesség szerint döntünk, azaz akkor vesszük be a soron következő élt a fába, ha nem alkot kört a korábban bevett élekkel. (3 pont)

   Ezt a módszert követve kaptuk az ábrán vastag lila élekkel megjelölt feszítőfát. (5 pont)

   Ebben a feszítőfában f és h között az $fcedh$ út vezet, melynek kérdezett szélessége ezen út minimális szélességű élének szélessége, azaz 14. Tehát a feladat második kérdésére 14 a válasz. (2 pont)

6. Van-e valamely $n \geq 2$ egész esetén olyan $2n$ pontú G gráf, hogy G-nek is és komplementerének, $\overline{G}$-nek is van Euler-sétája?

   Van ilyen gráf, például egy 4 pontú út. (5 pont)

   Ez egy út, tehát van Euler-sétája, és a komplementere is egy 4 pontú út, tehát annak is van. (5 pont)

   Annak a tételnek a felidézéséért, hogy ha egy véges, összefüggő gráfban legfeljebb két páratlan fokú csúcs van, akkor van a gráfnak Euler-sétája, 2 pont jár. Aki ebből még azt is levezeti, hogy $n \geq 3$ esetén ez nincs a feladatban leírt tulajdonságú gráf, kapjon még 2 pontot.

A Számítástudomány alapjai

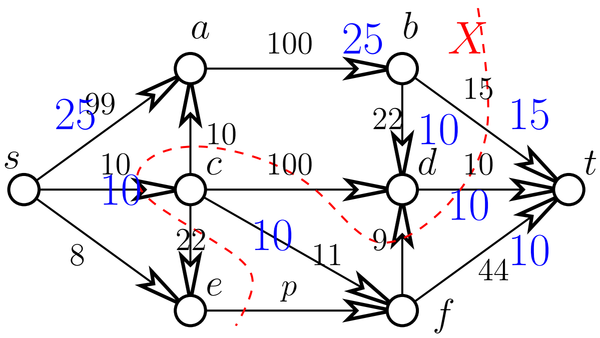
2. pótZH javítókulcs (2015. 12. 07.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Legyenek a G gráf csúcsai a kocka csúcsai, és két csúcs között pontosan akkor fusson él, ha e két csúcs a kocka ugyanazon élének végpontjai. Határozzuk meg a G gráf komplementerének kromatikus számát, $\chi(\overline{G})$-t.

   A $\overline{G}$ gráf kiszínezhető 4 színnel,pl. úgy, hogy a kocka felső lapjának csúcsait 4 különböző színre színezzük, és az alsó lap minden csúcsának a felette levő csúcs színét adjuk. (3 pont)
   Másrészt 4 szín feltétlenül szükséges $\overline{G}$ színezéséhez, hiszen G egy olyan páros gráf, aminek mindkét színosztályában $4-4$ csúcs van (a színosztályok csúcsai egy-egy szabályos tetraédert alkotnak), és G egy színosztálya a komplementerben klikk, tehát már egy színosztály négy csúcsának kiszínezéséhez is legalább 4 szín szükséges. (5 pont)
   Azt kaptuk, hogy 4 szín elegendő, de 3 nem, tehát $\chi(\overline{G}) = 4$. (2 pont)

2. Határozzuk meg a fenti hálózatban az ef él p kapacitásának összes olyan értékét, amire a maximális st-folyamnagyság pontosan 42.



   Először $p = 0$-ra kerestünk maximális folyamot az órán tanult növelő utas algoritmussal. Az ábrán látható, 35 nagyságú folyamot kaptuk, ahol a kékkel írt nagyobb számok az adott élen folyó folyammennyiséget jelzik. (Amelyik élen nincs ilyen szám, ott 0 folyam folyik.) (3 pont)
   A segédgráfban elérhető pontox X halmaza olyan st-vágást indukál az *eredeti* hálózatban, amelynek kapacitása $c(X) = 35 + p$. (2 pont)
   Mivel egy 42 nagyságú st-folyamhoz az szükséges, hogy minden st-vágás kapacitása legalább 42 legyen, ezért ilyenkor $p \geq 7$. (2 pont)
   Ha $p = 7$, akkor az ábrán látható folyam még növelhető 7-tel a $seft$ úton javítva, tehát $p = 7$ esetén a maximális folyamnagyság az X által indukált 42 kapacitású vágás miatt pontosan 42. (1 pont)
   Ha azonban $p > 7$, akkor az említett $seft$ úton 7-nél több folyam is küldhető, így a maximális folyamnagyság 42-nél bizonyosan nagyobb lesz. (1 pont)
   A válasz tehát az, hogy kizárólag $p = 7$ esetén lesz a maximális st-folyamnagyság pontosan 42. (1 pont)

3. Tegyük fel, hogy $G = (A, B; E)$ egyszerű, páros gráf A színosztályában 99 csúcs van, ezek bármelyikének a fokszáma legalább 33, de A-ban van 66 olyan csúcs, amelyek bármelyikének foka legalább 66. Sőt, A tartalmaz 33 olyan csúcsot is, amelyek mindegyikéből legalább 99 él indul. Mutassuk meg, hogy G-nek van A-t fedő párosítása.

   A Hall-tétel szerint G-nek pontosan akkor van A-t lefedő párosítás, ha a Hall-feltétel teljesül az A színosztályra, azaz ha $|N(X)| \geq |X|$ áll az A minden X részhalmazára. (3 pont)

Ezt kell tehát ellenőriznünk. Ha $1 \leq |X| \leq 33$, akkor X tetszőleges pontjának van 33 szomszédja, tehát $|N(X)| \geq 33 \geq |X|$. (2 pont)
Ha $33 < |X| \leq 66$, akkor X tartalmazza a 66 db legalább 66-fokú pont valamelyikét, ezért $|N(X)| \geq 66 \geq |X|$. (2 pont)
Ha pedig $X > 66$, akkor X tartalmazza a 99 pontú A színosztály 33 db legalább 99 fokú csúcsának egyikét, azaz $|N(X)| \geq 99 \geq |A| \geq |X|$. (2 pont)
A Hall-feltételt tehát minden esetben teljesül, így G-nek bizonyosan van A-t fedő párosítása. (1 pont)

4. Tegyük fel, hogy G olyan összefüggő, síkbarajzolt gráf, amelynek 14 tartománya van, minden csúcsának fokszáma 3 vagy 6, és a harmadfokú csúcsok száma kétszerese a hatodfokúakénak. Hány csúcsa és hány éle van G-nek?

Legyen n_3 ill. n_6 a G gráf harmad- ill. hatodfokú csúcsainak száma. Ekkor a szokásos jelölésekkel $n = n_3 + n_6$, (1 pont)
az feladatbeli feltétel miatt $n_3 = 2 \cdot n_6$ és $t = 14$, (1 pont)
az Euler-formulából pedig $n + t = e + 2$, hiszen G öf és SR. (2 pont)
A fokszámösszegről tanultak szerint $2e = 3n_3 + 6n_6$, (1 pont)
és az így kapott öt egyenletből már meg tudjuk határozni az öt ismeretlent. Pl. $2e = 3n_3 + 6n_6 = 6n_6 + 6n_6$, azaz $e = 6n_6$. Ezt az Euler formulába behelyettesítve $3n_6 + 14 = 6n_6 + 2$, azaz $3n_6 = 12$, vagyis $n_6 = 4$. Innen $n_3 = 2n_6 = 8$ és $e = 6n_6 = 24$ adódik. (4 pont)
A feladat kérdésére a válasz tehát $n = n_3 + n_6 = 12$, $e = 24$. (1 pont)

Szükségtelen annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy valóban létezik-e a feladatban megkívánt tulajdonságokkal rendelkező gráf, hiszen éppen azt igazoltuk, hogy ha van olyann gráf, aminek létezését a feladat állítja, akkor n és e csak a megoldásban kapott értéket veheti fel. Egyébként van ilyen gráf, és ez mutatja azt is, hogy korrekt érveléssel nem kaphatunk más választ. (Ha ugyanis nem létezne ilyen gráf, azaz a feladat az üreshalmaz eleméről szólna, akkor az is igazolható lenne, hogy a feladatban szereplő gráfnak -7 db éle és $\sqrt{2}$ db csúcsa van.) Abból azonban, hogy találunk egy olyan gráfot, amilyet a feladat körülír, még nem következik, hogy minden ilyen gráfnak ugyanannyi csúcsa és éle van. Minden esetre, aki csak annyi értékelhető munkát végez, hogy talál egy ilyen gráfot (tekintettel arra, hogy ez nem teljesen triviális), az kapjonösszesen 2 pontot.

5. Határozzuk meg az $n = \binom{12}{6}$ pozitív osztóinak számát!

Tudjuk, hogy ha $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, akkor n pozitív osztóinak száma $d(n) = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i + 1)$. (3 pont)
Ezért elég meghatározni az n kanonikus alakját, (2 pont)
Mivel $n = \binom{12}{6} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3} = 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, (3 pont)
az n osztóinak száma $d(n) = (2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 24$. (2 pont)

6. Melyik az a legnagyobb m modulus, amelyre a $42x \equiv 2015(m)$ lineáris kongruenciának megoldása az $x = 3$?

A kongruencia fennállása azt jelenti, hogy $m \mid 2015 - 42x$, (3 pont)
így mivel $x = 3$ megoldás, az $m \mid 2015 - 42 \cdot 3 = 2015 - 126 = 1889$ oszthatóságnak kell teljesülnie. (3 pont)
A legnagyobb olyan m számot keressük tehát, amire $m \mid 1889$ teljesül, azaz 1889 legnagyobb osztója a kérdésre a válasz. (2 pont)
Ez pedig nem más, mint az $m = 1889$. (2 pont)