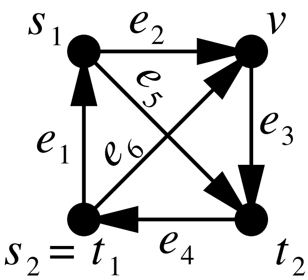
Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2023. május 17.

1. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát, ahol p valós paraméter. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) A p paraméter minden értékére döntsük el, hogy a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos-e a megoldáshalmazán és p-nek azokra az értékeire, amikre a válasz igen, határozzuk is meg a feladat maximumértékét.

$$\begin{aligned}
&\max\{7x_2 + 3x_3 + p \cdot x_4\} \\
&\text{ha} \\
x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &\leq 1 \\
4x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4 &\geq 2 \\
x_3 + 5x_4 &\leq 3
\end{aligned}$$

2. Tekintsük a következő kéttermékes folyamfeladatot: maximalizálandó az összfolyamérték az alábbi ábra hálózatában, ha az első, illetve a második termékhez tartozó termelő és fogyasztó pontok s_1 és t_1, illetve s_2 és t_2, továbbá az élek kapacitásai az alábbi táblázatban (annak a $c(e)$ sorában) láthatók.



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
$c(e)$	1	2	2	2	3	2
$x_1(e)$	□	□	□	2	□	□
$x_2(e)$	1	□	2	□	□	2

A feladatot egy LP szolver programmal megoldva a fenti táblázatban látható $x_1(e)$, illetve $x_2(e)$ értékeket kaptuk, amik minden e élre az első, illetve második termékből szállított mennyiséget jelölik. Határozzuk meg a táblázat hiányzó, □-val jelölt értékeit és állapítsuk meg a maximális összfolyamértéket.

3. Tekintsük az {`a,b,c,d,e,h,i,j,k,l,m,n,o,r,s,t,v`} betűhalmazt, és az elemeiből képzett alábbi szavakat, mint részhalmazokat (a szavak utáni zárójelben lévő szám jelenti az adott halmaz költségét):

```
john (3),     hans (4),  martin (4),  henrik (5), jens (5),
caroline (6), jakob (6), nikolaj (7), navid (7).
```

Hajtsuk végre ezen adatokkal az alaphalmaz részhalmazokkal történő lefedésére szolgáló, előadáson tanult közelítő algoritmust.

4. Az a, b, c, d, e, f, g, h különböző pontok úgy helyezkednek el a síkon, hogy a, b, c, d és c, d, e, f is olyan négyzetek csúcsai, melyekben c és d szomszédosak, g az a, b, c, d négyzet középpontja, h pedig a c, d, e, f négyzet középpontja. Legyen G az az élsúlyozott teljes gráf, melynek csúcsai a, b, c, d, e, f, g, h, az élek súlya pedig azonos a csúcsok geometriai távolságával. Hajtsuk végre a G gráfra az utazóügynök probléma közelítésére tanult 2-approximációs algoritmust.

5. A Steiner-fa probléma egy bemenete legyen egy 10 csúcsú élsúlyozott teljes gráf, melyben a terminálok halmaza 8 csúcsú. Lehetséges-e, hogy az élsúlyozás metrikus, ha

a) az (egyik) optimális Steiner-fa 10 csúcsú?

b) a tanult 2-approximációs algoritmussal kapott (egyik) Steiner-fa 10 csúcsú?

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér. Az aláíráshoz szükséges minimális pontszám 24. Elégséges megajánlott jegyhez legalább 33, közepeshez 42, jóhoz 51 pontot kell elérni. Kérjük, hogy **minden feladat külön lapra** kerüljön. A lapok tetején jól láthatóan legyen feltüntetve a név, a Neptun-kód és a feladat sorszáma.

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2023. május 17.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Az 1. feladat megoldása. a) A megadott lineáris program $\max\{cx : Ax \le b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ -4 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(1 pont)}$$
$$c = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & p \end{pmatrix}.$$

A duálist a tanult $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{aligned} &\min\{y_1 - 2y_2 + 3y_3\} \\ &\text{ha} \\ &y_1 - 4y_2 = 0 \\ &3y_1 - 5y_2 = 7 \\ &y_1 - y_2 + y_3 = 3 \\ &4y_1 - 7y_2 + 5y_3 = p \\ &y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{aligned} \qquad \text{(5 pont)}$$

A duális felírásáért járó 5 pontból minden lényeges elvi hiba (így például egyenletek helyett egyenlőtlenségek szerepeltetése, a nemnegativitási feltételek elmaradása, a célfüggvény hiánya vagy minimalizálás helyett maximalizálás előírása) 4 pont levonást jelentsen.

b) A primál rendszere megoldható: például $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ megoldás. (0 pont)
Így a tanultak szerint a primál feladat célfüggvényének a felülről korlátossága ekvivalens $yA = c$, $y \ge 0$, vagyis a duális rendszerének a megoldhatóságával. (1 pont)
A duális első két egyenletéből álló rendszert megoldva: $y_1 = 4$, $y_2 = 1$. Ezt a harmadikba helyettesítve: $y_3 = 0$. Mivel ezek az értékek az $y_i \ge 0$ feltételeknek is megfelelnek, ezért a duális rendszere pontosan akkor megoldható, ha a negyedik egyenletet is kielégítik; vagyis a $p = 9$ esetben. (1 pont)
Így a primál célfüggvénye pontosan akkor felülről korlátos, ha $p = 9$. (1 pont)
Mivel a fentiek szerint a $p = 9$ esetben a duális rendszerének az egyetlen megoldása $y = (4, 1, 0)$, ezért a duális minimuma az ezen az y-on felvett célfüggvényérték: $yb = y_1 - 2y_2 + 3y_3 = 2$. (2 pont)
Így a dualitástétel miatt a primál feladat maximuma is 2. (1 pont)
(A dualitástétel alkalmazható, hiszen a fentiek szerint a primál feladat megoldható és a $p = 9$ esetben a célfüggvénye felülről korlátos a megoldáshalmazán.) (0 pont)

A 2. feladat megoldása. $x_1(e_1) + x_2(e_1) \leq c(e_1) = 1$ a többtermékes folyamprobléma definíciója szerint. Mivel itt $x_2(e_1) = 1$ és $x_1(e_1) \geq 0$ (szintén a definíció szerint), ezért $x_1(e_1) = 0$. (2 pont)
Ezzel analóg gondolat használható az e_3, e_4 és e_6 élekre is, amikből $x_1(e_3) = 0$, $x_2(e_4) = 0$ és $x_1(e_6) = 0$. (1 pont)
Így a jelenleg ismert folyamértékek a következők:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
$x_1(e)$	0	$\square$	0	2	$\square$	0
$x_2(e)$	1	$\square$	2	0	$\square$	2

(0 pont)

A v csúcsra teljesül a folyammegmaradás az 1-es és a 2-es termékre vonatkozóan is, mert v egyik terméknek sem termelője vagy fogyasztója. Vagyis $i = 1$ és $i = 2$ esetén is fennáll a következő egyenlet: $x_i(e_3) - x_i(e_2) - x_i(e_6) = 0$. Ide behelyettesítve az ismert folyamértékeket a $0 - x_1(e_2) - 0 = 0$, illetve a $2 - x_2(e_2) - 2 = 0$ egyenleteket kapjuk. Ezekből tehát $x_1(e_2) = x_2(e_2) = 0$. (2 pont)
s_1-re teljesül a folyammegmaradás a 2-es termékre vonatkozóan: $x_2(e_2) + x_2(e_5) - x_2(e_1) = 0$. Behelyettesítve az ismert értékeket: $0 + x_2(e_5) - 1 = 0$, amiből tehát $x_2(e_5) = 1$. (2 pont)
Hasonlóan, t_2-re teljesül a folyammegmaradás az 1-es termékre vonatkozóan: $x_1(e_4) - x_1(e_3) - x_1(e_5) = 0$. Behelyettesítve az ismert értékeket: $2 - 0 - x_1(e_5) = 0$, amiből $x_1(e_5) = 2$. (2 pont)
Ezzel tehát már az összes folyamérték ismert:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
$x_1(e)$	0	0	0	2	2	0
$x_2(e)$	1	0	2	0	1	2

(0 pont)

Végül az összfolyamértékhez az s_1-et, illetve az s_2-t elhagyó „nettó" termékmennyiséget kell kiszámítani az 1-es, illetve a 2-es termékre vonatkozóan. s_1-et az 1-es termékből elhagyó mennyiség: $x_1(e_2) + x_1(e_5) - x_1(e_1) = 0 + 2 - 0 = 2$. Hasonlóan, s_2-t a 2-es termékből elhagyó mennyiség: $x_2(e_1) + x_2(e_6) - x_2(e_4) = 1 + 2 - 0 = 3$. Így az összfolyamérték ezeknek az összege: $2 + 3 = 5$.(3 pont)

A 3. feladat megoldása. Az algoritmus mindig azt a részhalmazt választja ki, amelyre a lehető legkisebb a halmaz költségének és az újonnan lefedett elemek számának hányadosa. (0 pont)
Az első lépésben a `martin` részhalmazt kell választanunk, mert ennek a legkisebb az egy új elemre eső költsége ($\frac{2}{3}$). (2 pont)
Ezt követően a `john` részhalmaz jön, itt 1 az egy új elemre eső költség. (2 pont)
A következő halmaz a `caroline` kell legyen, ez újabb 3 elemet fed le, 6 költséggel, (2 pont)
majd a `jakob` halmaz következik, itt a hányados 3. (2 pont)
Az ezt követő lépésben a `navid` halmazra lesz minimális a hányados ($\frac{7}{2}$), (2 pont)
utolsónak pedig a `hans` halmazt választjuk (a hányados 4), ezzel minden elemet lefedtünk. (2 pont)
A kapott fedés tehát: {`martin, john, caroline, jakob, navid, hans`}, költsége 30.

A 4. feladat megoldása. Az algoritmus először egy minimális összsúlyú feszítőfát keres Kruskal-algoritmussal. (1 pont)
A legkisebb súlyú élek $ga, gb, gc, gd, hc, hd, he, hf$, (1 pont)
amik közül az algoritmus biztosan beválasztja a ga, gb, he, hf éleket, mert ezek az összes legkisebb súlyú él által alkotott részgráf egyetlen körében sincsenek benne. A maradék legkisebb súlyú élekből pedig (hasonló okoból) pontosan hármat fog beválasztani, legyenek ezek (mondjuk) gc, gd, hc. (1 pont)
Ezzel meg is kaptuk a minimális feszítőfát. (1 pont)
Következő lépésként a minimális feszítőfa éleit megduplázzuk, (2 pont)
majd megkeressük a kapott gráf egy Euler-körsétáját. (1 pont)
Például $g, a, g, b, g, d, g, c, h, e, h, f, h, c, g$ megfelel a célnak, de persze számos másik Euler-körséta is megadható. (2 pont)
Ezen végigmenve úgy, hogy az ismétlődő csúcsokat tartalmazó szakaszokat egy éllel levágjuk,(1 pont)
a $g, a, b, d, c, h, e, f, g$ Hamilton-kört kapjuk, ez a kimenet. (2 pont)

Az 5. feladat megoldása. a) Ilyenkor lehetséges, hogy az élsúlyozás metrikus, (0 pont)
megadunk egy alkalmas példát: legyenek a gráf csúcsai $x, y, a_1, a_2, \ldots, a_8$, legyen $a_1, a_2, \ldots, a_8 \in T$, legyen továbbá az $xy, xa_1, xa_2, xa_3, xa_4$ és az ya_5, ya_6, ya_7, ya_8 élek súlya 1, az összes többi él súlya pedig 2. (3 pont)
Mivel bármely két él összsúlya legalább 2 és bármely él súlya legfeljebb 2, ez a súlyozás teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget, így valóban metrikus. (3 pont)
Az 1 súlyú élek feszítőfát alkotnak, ami 9 súlyú Steiner-fa. Könnyen látható, hogy bármely más Steiner-fa (nincs túl sok) súlya ennél nagyobb, így az optimális Steiner-fa csakugyan 10 csúcsú. (3 pont)

Természetesen rengeteg más jó példa is adható. Az utolsó 3 pontért leírandó indoklás elvárt részletessége attól függ, hogy mennyire könnyen átlátható a súlyozás.

b) Metrikus élsúlyozás esetén a tanult algoritmus a terminálok halmazán keres minimális összsúlyú feszítőfát és ezt adja kimenetként, így a kapott Steiner-fa nem lehet 10 csúcsú. (3 pont)

Elfogadható az is, ha valaki úgy véli, hogy nem szükséges a bemenet metrikusságát vizsgálni, ehelyett azonnal metrizálja a bemenetként kapott gráfot. Ekkor előfordulhat, hogy a kimenetként kapott Steiner-fa 10 csúcsú, ha bizonyos terminálok közti legrövidebb út gyanánt nem a köztük lévő élet, hanem egy Steiner-pontot tartalmazó utat találunk meg (aminek a hossza persze azonos az él súlyával). Ez a megállapítás önmagában csak 1 pontot ér, a teljes 3 ponthoz az is szükséges, hogy megadjunk egy alkalmas bemenetet és megindokoljuk, hogy az miért lesz valóban jó (azt nem kell megindokolni, hogy a metrizálás során kapott legrövidebb utak közül miért lehetséges épp a kívántat megkapni). Ilyen bemenet például az, ahol a csúcsok $x, y, a_1, a_2, \ldots, a_8$, a terminálok $a_1, a_2, \ldots, a_8$, az xa_1, xa_2, ya_3, ya_4 élek súlya 1, minden más él súlya 2.