Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2019. április 24.

1. a) Oldjuk meg a jobbra látható lineáris programozási feladatot.

b) Változtassuk meg a feladat célfüggvényét így: $\max\{t \cdot x_1 + 4x_2\}$. A t valós paraméter mely értékeire teljesül, hogy az $x_1 = 2$, $x_2 = 7$ választással a feladat egy optimális (vagyis a célfüggvényt maximalizáló) megoldását kapjuk?

$\max\{9x_1 + 4x_2\}$
ha
$2x_1 + x_2 \leq 16$
$x_1 + 3x_2 \leq 23$
$x_2 \leq 7$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

2. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Döntsük el, hogy a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos-e a megoldáshalmazán és ha igen, határozzuk meg a feladat maximumértékét.

$\max\{2x_1 - 2x_2\}$
ha
$3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 3$
$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \geq 1$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

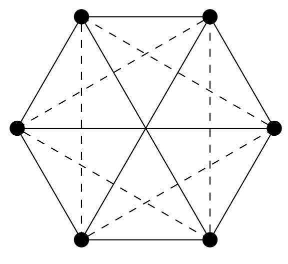
3. Futtassuk le és dokumentáljuk a részösszeg probléma közelítésére szolgáló teljesen polinomiális approximációs sémát a $2, 3, 5, 9, 10, \quad t = 21$ bemenetre, $\varepsilon = 1$ mellett.

4. Egy probléma bemenete pozitív egész számok egy $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorozata. Döntsük el, hogy egy, a problémára adott $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ lépésszámú algoritmus polinomiális-e.

5. Legyen az utazóügynök probléma egy bemenete az alábbi 6 csúcsú teljes gráf, ahol a folytonos élek 4, a szaggatott élek 1 súlyúak.

a) Mutassuk meg, hogy ez az élsúlyozás metrikus.

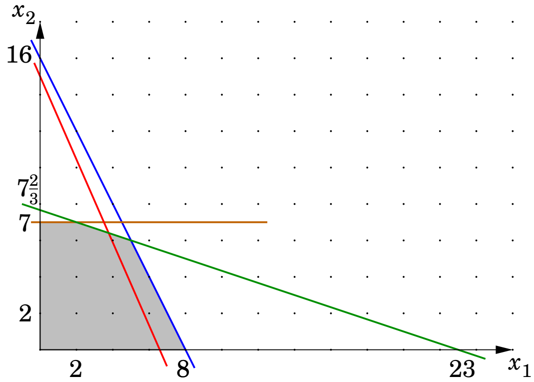
b) Igaz-e, hogy ezen a bemeneten a Christofides-algoritmus bármely futtatása során optimális megoldást kapunk?



A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér. Az aláíráshoz szükséges minimális pontszám 24. Elégséges megajánlott jegyhez legalább 33, közepeshez 42, jóhoz 51 pontot kell elérni. Kérjük, hogy **minden feladat külön lapra** kerüljön. A lapok tetején jól láthatóan legyen feltüntetve a név, a Neptun-kód és a feladat sorszáma.

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása. a) A feladat megoldáshalmazát koordinátarendszerben ábrázoljuk. Az első, második, illetve harmadik egyenlőtlenség megoldáshalmaza sorra a kék, zöld, illetve barna egyenes alatti félsíkok. Ezeknek, illetve a nemnegativitási feltételekből fakadó első síknegyednek a metszete a megoldáshalmaz, amit az ábrán a szürkével jelölt síkidom ábrázol.



(2 pont)

Azok a pontok, amelyeken a célfüggvény a (tetszőlegesen rögzített) p értéket veszi fel, a $9x_1 + 4x_2 = p$ egyenest alkotják. Átrendezve: $x_2 = \frac{p}{4} - \frac{9}{4}x_1$. Így az egyenes meredeksége (p-től függetlenül) $-\frac{9}{4}$. Például a $p = 60$ értékre az egyenest az ábrán pirossal ábrázoltuk. (2 pont)

p növelésére a piros egyenes „önmagával párhuzamosan" felfelé csúszik (mert a meredeksége változatlan). A kérdés az, hogy p-nek mi az a legnagyobb értéke, amelyre még metszi a megoldáshalmazt. (1 pont)

Mivel a piros egyenes meredeksége mindig $-\frac{9}{4}$ és így kisebb (-2)-nél, a kék egyenes meredekségénél, ezért ez arra a p-re következik be, amelyre a piros egyenes áthalad a kék egyenes és az x_1-tengely metszéspontján, vagyis a $(8; 0)$ ponton. (2 pont)

A célfüggvény tehát az $x_1 = 8$, $x_2 = 0$ értékekre veszi fel a maximumát, a maximumérték pedig $p = 9 \cdot 8 + 4 \cdot 0 = 72$. (1 pont)

(Azt a tényt, hogy az optimumhely valóban az $(8; 0)$ pont indokolhatjuk azt a szemlélet alapján nyilvánvaló tényt felhasználva is, hogy a célfüggvény optimuma biztosan felvétetik a megoldáshalmaz valamelyik csúcsán. Ezeket meghatározva: $(8; 0)$, $(5; 6)$, $(2; 7)$, $(0; 7)$, $(0; 0)$. Ezeken kiszámítva a célfüggvény értékét sorra a 72, 69, 32, 28, 0 értékeket kapjuk, amelyek közül valóban a 72 a legnagyobb.)

b) Az a) rész gondolatmenetét követjük. Mivel a $(2; 7)$ pont a zöld és a barna egyenesek metszéspontja, ezért ez akkor lesz maximumhely, ha a $t \cdot x_1 + 4x_2 = p$ egyenletű piros egyenes meredeksége a zöld és a barna egyenesek meredeksége között van. (2 pont)

A $t \cdot x_1 + 4x_2 = p$ egyenletű piros egyenes meredeksége $-\frac{t}{4}$, míg a zöld és a barna egyenesek meredeksége $-\frac{1}{3}$, illetve 0. Ezekből tehát a $-\frac{1}{3} \leq -\frac{t}{4} \leq 0$ feltételek adódnak, amikből $0 \leq t \leq \frac{4}{3}$. A $(2; 7)$ pont tehát a $0 \leq t \leq \frac{4}{3}$ paraméter értékekre maximalizálja a célfüggvényt. (2 pont)

(Ennél több számolással a b) kérdés is megválaszolható a megoldáshalmaz csúcsainak végigvizsgálásán alapuló gondolatmenettel.)

A 2. feladat megoldása. a) A megadott lineáris programban a változók nemnegativitása is szerepel a feltételek között, ezért érdemes azt $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ alakúnak tekinteni, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$c = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2 pont)

(Amint látható, a feltételek között szereplő egyenletet helyettesítettük az $3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3$ és a $-3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 \leq -3$ egyenlőtlenségekkel, illetve az utána következő egyenlőtlenséget is megszoroztuk (-1)-gyel.)

Most a duálist a tanult $\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$
\begin{aligned}
&\min\{3y_1 - 3y_2 - y_3\}\\
&\text{ha}\\
&3y_1 - 3y_2 - y_3 \geq 2\\
&-3y_1 + 3y_2 + y_3 \geq -2 && \text{(4 pont)}\\
&4y_1 - 4y_2 - y_3 \geq 0\\
&y_1 - y_2 - y_3 \geq 0\\
&y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

A duális felírásáért járó 4 pontból minden lényeges elvi hiba (így például egyenlőtlenségek helyett egyenletek szerepeltetése, a nemnegativitási feltételek elmaradása, a célfüggvény hiánya vagy minimalizálás helyett maximalizálás előírása) 3 pont levonást jelentsen.

b) A primál feladat rendszere megoldható, például az $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ választással. A duális feladat rendszere is megoldható, például az $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = y_3 = 0$ választással. A duális megoldhatóságából pedig a tanultak szerint következik, hogy a primál feladat célfüggvénye felülről korlátos a megoldáshalmazán. (2 pont)

A duális feladat első két egyenlőtlensége együtt az $3y_1 - 3y_2 - y_3 = 2$ egyenletet adja. Mivel ennek a bal oldala épp a duális célfüggvénye, ezért a duális feladat minden megoldásához a 2 célfüggvényérték tartozik. Így a duális feladat minimumértéke 2. (2 pont)

Ebből pedig a dualitástétel szerint következik, hogy a primál feladat maximumértéke is 2. (2 pont)

Megjegyzések:

1. A primál feladatot felfoghatjuk $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakúnak is és erre használhatjuk a duális eredeti definíció szerinti alakját, vagyis a $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ alakot. Ekkor a változók nemnegativitását előíró négy egyenlőtlenség is az $Ax \leq b$ rendszer része, vagyis A-nak és b-nek 7 sora van. Ennek megfelelően a duális egy 7 változós lineáris program – amely azonban az előadáson tanultak szerint ekvivalens a fent kapottal.

2. Bár erre a feladat megoldásához nincs szükség, a duális programot egyszerűbb, ekvivalens alakba is írhatjuk. Ehhez az első két egyenlőtlenség egyenlettel való (fentebb már említett) helyettesítésén túl az előadáson látott módszert használhatjuk: a primál feladat egyenletéből fakadó y_1 és y_2 duális változók helyett bevezethetjük az $y_{12} := y_1 - y_2$ változót, amivel a duális az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$
\begin{aligned}
&\min\{3y_{12} - y_3\}\\
&\text{ha}\\
&3y_{12} - y_3 = 2\\
&4y_{12} - y_3 \geq 0\\
&y_{12} - y_3 \geq 0\\
&y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

(Itt az y_{12} változóra semmilyen előjel megkötést nem teszünk, az bármilyen valós értéket felvehet. Valóban: mivel két nemnegatív valós szám különbségeként bármilyen valós szám előállhat, így az eredetivel ekvivalens feladatot kapunk.)

3. A feladat b) része megoldható elemi eszközökkel, a duálisra való hivatkozás nélkül is. A primál feladat egyenletét $\frac{2}{3}$-dal szorozva: $2x_1 - 2x_2 + \frac{8}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = 2$. Ebből $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ miatt $2x_1 - 2x_2 \leq 2$ következik, így a primál feladat célfüggvénye felülről korlátos, a 2 egy felső korlátja. Másrészt mivel az $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ primál megoldáshoz tartozó célfüggvényérték éppen 2, ezért ez a felső korlát el is érhető. Így a primál feladat maximumértéke 2.

A 3. feladat megoldása. Az algoritmus futtatása során keletkező listák:

$$L_1 = \{0, 2\}, L_1' = \{3, 5\}, L_2 = \{0, 2, 3, 5\}, L_2' = \{5, 7, 8, 10\}, L_3 = \{0, 2, 3, 5, 7, 8, 10\},$$

$$L_3' = \{9, 11, 12, 14, 16, 17, 19\}, L_4 = \{0, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, \cancel{11}, 12, 14, 16, \cancel{17}, 19\}$$

(a 11,17 értékek a ritkításkor törlődtek, de a 12 érték nem, hiszen a 11-et töröltük),

$$L_4' = \{10, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20\},$$

(a $t = 21$-nél nagyobb értékeket nem vesszük be),

$$L_5 = \{0, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

L_5-öt már nem kell ritkítani, a kimenet a 20 lesz. Nem hiba, ha valaki a t-nél nagyobb elemeket a vesszős listába beveszi és csak összefésülés után törli, illetve ha az utolsó listában is ritkít (helyesen).
Jó listák, ritkítás nélkül: (3 pont)
$\delta = 0,1$: (1 pont)
t fölöttiek levágása: (1 pont)
Ritkítás: mit jelent: (1 pont)
minden (nem vesszős!) listát kell ritkítani: (2 pont)
épp a 11-et és a 17-et kell kiritkítani és a 12-t nem: (3 pont)
Végeredmény az utolsó lista max. eleme: (1 pont)

Számolási hibákért (darabonként) 1 pontot vonjunk le.

A 4. feladat megoldása. A bemenet mérete (a felsőegészrészek hanyagolásával) $k = \log_2 n + \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \ldots + \log_2 a_n$, (2 pont)
k függvényében kell vizsgálnunk a kérdéses L lépésszám polinomialitását. (2 pont)
Az a_i pozitív egészekre semmilyen kikötés nincs, így elképzelhető (például), hogy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 2^n$. (2 pont)
Ekkor $k = \log_2 n + n(n+1)$, (1 pont)
a lépésszám pedig $L = 2^n$. (1 pont)
Mivel $k = \log_2 n + n(n+1) \leq 2n^2$, (1 pont)
$L \geq 2^{\sqrt{k/2}}$, (1 pont)
vagyis a lépésszám nem polinomiális, (1 pont)
hiszen nem léteznek olyan c_1, c_2 konstansok, melyekre $2^{\sqrt{k/2}} \leq c_1 k^{c_2}$ minden k esetén teljesülne. (1 pont)
(Ez utóbbi állítás azért igaz, mert $c_1 k^{c_2} = c_1 2^{c_2 \log_2 k}$, és $\sqrt{k/2} - c_2 \log_2 k$ végtelenhez tart, ha k végtelenhez tart, de ezen indoklás hiányáért ne vonjunk le pontot.)
Aki azzal érvel (számítások nélkül), hogy az a_i-k átlaga exponenciális lesz a méretük összegében, az az utolsó 8 pontból 3-at kapjon, ha ezen kívül az n jelenlétéből adódó problémával is foglalkozik, akkor pedig 5-öt.

Az 5. feladat megoldása. a) Definíció szerint azt kell ellenőriznünk, hogy bármely a, b, c csúcs esetén teljesül, hogy ($s(e)$-vel jelölve az e és súlyát) $s(ac) \leq s(ab) + s(bc)$. Mivel csak kétféle súly van és ebből a 4 a nagyobbik, csak azt kell ellenőriznünk, hogy ha az ac él súlya 4, akkor ab ás bc közül valamelyiknek szintén 4 a súlya, (1 pont)
ez pedig teljesül, mert az 1 súlyú élek két diszjunkt (3-3 csúcsú) teljes gráfot alkotnak. (1 pont)
b) Mivel csak 1 és 4 súlyú élek vannak és az 1 súlyú élek két diszjunkt háromszöget alkotnak, az optimális Hamilton-kör négy 1 súlyú és két 4 súlyú élet tartalmaz, az összsúlya így 12. Az algoritmus először egy minimális összsúlyú F feszítőfát keres, ez esetünkben négy 1 súlyú élet és egy 4 súlyú élet tartalmaz, a súlya tehát 8. (1 pont)
F páratlan fokú csúcsainak száma kettő, négy, vagy hat lesz, attól függően, hogy melyik minimális feszítőfát találja meg az algoritmus. (1 pont)
Ez azért fontos, mert a következő lépésben ezen páratlan fokú csúcsok által feszített részgráfban kell egy minimális összsúlyú párosítást keresni, majd a kapott párosítást F élhalmazához hozzávenni, az így nyert H gráfban Euler-körsétát keresni, végül azt Hamilton-körré vágni le. (1 pont)
Első eset: F-nek két páratlan fokú csúcsa van. Ekkor H összsúlya legfeljebb 12. (1 pont)
Második eset: F-nek négy páratlan fokú csúcsa van. Ekkor H összsúlya legfeljebb $8 + 1 + 4 = 13$, mert a négy páratlan fokú csúcs között kell legyen kettő, melyek közt 1 súlyú él fut. (1 pont)
Harmadik eset: F-nek hat páratlan fokú csúcsa van, vagyis a minimális összsúlyú teljes párosítást az eredeti gráfban kell keresni. Ekkor H összsúlya legfeljebb $8 + 1 + 1 + 4 = 14$, mert G-ben nyilván van $1 + 1 + 4$ összsúlyú teljes párosítás. (1 pont)
Természetesen mindhárom esetben teljesül, hogy a levágások után kapott C Hamilton-kör összsúlya nem nagyobb H összsúlyánál, így C összsúlya legfeljebb 14. (2 pont)
Mivel C hat élből áll és ezek közt csak 1 és 4 súlyúak vannak, ez csak úgy lehetséges, ha a kérdéses súly legfeljebb $4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 12$, hiszen három 4 súlyú él jelenléte már 15-ös összsúlyt jelentene. Mindezek alapján tehát teljesül, hogy az algoritmus tetszőleges futtatása során optimális megoldást kapunk. (2 pont)