Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2015. április 14.

1. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Igaz-e, hogy az $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$ választással a (primál) feladat egy maximumhelyét adtuk meg?

$\max\{x_4\}$
ha
$5x_1 - 10x_3 + x_4 \leq -3$
$5x_2 + 2x_4 = 14$
$x_3 + 4x_4 \leq 11$
$2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 \geq -10$

2. A $G(A, B; E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen az alábbi, balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem (minden $1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 5$ esetén).

a) A p paraméter mely értékeire igaz, hogy az alábbi, jobb oldali táblázatban megadott c hozzárendelés címkézés?

b) Igaz-e, hogy az $\{a_1, b_3\}$, $\{a_2, b_5\}$, $\{a_3, b_2\}$ és $\{a_4, b_1\}$ élek maximális súlyú párosítást alkotnak G-ben?

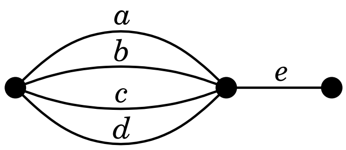
$$\begin{pmatrix} 8 & 11 & 8 & 4 & 8 \\ 5 & 8 & 5 & 2 & 6 \\ 6 & 9 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

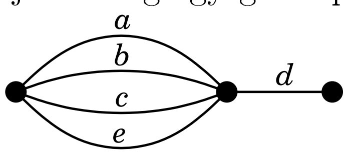
v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c(v)$	:	p	2	2	4	4	$12 - p$	3	0	4

3. Koordinátázza az alábbi mátrix a valós számok teste fölött az $\mathcal{M}_x$ matroidot. Mely x értékekre lesz $\mathcal{M}_x$ grafikus? A grafikus esetekben adjunk is meg egy gráfreprezentációt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{pmatrix}$$

4. A bal oldali ábra gráfjának körmatroidja legyen $\mathcal{A}$, a jobb oldalié $\mathcal{B}$. Grafikusak-e az $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$, illetve az $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ matroidok? Ha igen, adjunk meg egy gráfreprezentációt.





5. Egy hét csúcsú teljes gráf csúcsai legyenek a síkon egy egységoldalú szabályos hatszög csúcsai (sorrendben A, B, C, D, E, F) és középpontja, G. A G-ből induló élek súlya azonos az él végpontjainak síkbeli távolságával, a többi él súlya a végpontok síkbeli távolságánál $\frac{1}{2}$-del nagyobb. Hajtsuk végre és dokumentáljuk a Steiner-fa problémára tanult közelítő algoritmust a gráfra, ha a terminálok halmaza $\{B, C, E, F\}$.

6. Legyen G egy 10 csúcsú egyszerű gráf, melyre $\tau(G) = 8$. Igaz-e, hogy minden ilyen G gráfra létezik a minimális lefogó ponthalmaz közelítésére tanult algoritmusok valamelyikének olyan futása, melyre a talált lefogó ponthalmaz minimális?

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása.

a) A megadott lineáris program $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ -14 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix},$$
$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Amint látható, a feltételek között szereplő egyenletet helyettesítettük az $5x_2 + 2x_4 \leq 14$ és a $-5x_2 - 2x_4 \leq -14$ egyenlőtlenségekkel, illetve az utolsó egyenlőtlenséget is megszoroztuk (-1)-gyel. Most a duálist a tanult $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{aligned}
&\min\{-3y_1 + 14y_2 - 14y_3 + 11y_4 + 10y_5\} \\
&\text{ha} \\
&5y_1 - 2y_5 = 0 \\
&5y_2 - 5y_3 + 3y_5 = 0 \\
&-10y_1 + y_4 + 4y_5 = 0 \\
&y_1 + 2y_2 - 2y_3 + 4y_4 + y_5 = 1 \\
&y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0
\end{aligned}$$

b) A megadott x_1, x_2, x_3, x_4 értékek valóban megoldást alkotnak (hiszen kielégítik a primál feladat rendszerét), az ehhez tartozó célfüggvényérték $x_4 = 2$.

A duális feladat rendszere szerencsére nagyon könnyen megoldható. Rögzítsük le például y_1 értékét: $y_1 = \alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor az első egyenletből $y_5 = \frac{5}{2}\alpha$. Ezekből és a harmadik egyenletből $y_4 = 10y_1 - 4y_5 = 10\alpha - 10\alpha = 0$. Továbbá a második egyenletből $y_2 - y_3 = -\frac{3}{5}y_5 = -\frac{3}{2}\alpha$. Ezeket a negyedik egyenletbe helyettesítve:

$$y_1 + 2(y_2 - y_3) + 4y_4 + y_5 = \alpha + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\alpha\right) + 4 \cdot 0 + \frac{5}{2}\alpha = \frac{1}{2}\alpha = 1,$$

amiből $\alpha = 2$. Összefoglalva tehát: a duális megoldásai azok az $y = (y_1, \ldots, y_5)$ vektorok, amelyekre $y_1 = 2$, $y_4 = 0$, $y_5 = 5$, $y_2 - y_3 = -3$ és $y_1, \ldots, y_5 \geq 0$. Ebből az is látszik, hogy a duális rendszere megoldható, hiszen az $y_2 - y_3 = -3$, $y_2, y_3 \geq 0$ feltételek nyilván kielégíthetők (például: $y_2 = 0$, $y_3 = 3$). A duális egy tetszőleges megoldásán kiszámítva az ahhoz tartozó célfüggvényértéket:

$$-3y_1 + 14(y_2 - y_3) + 11y_4 + 10y_5 = -3 \cdot 2 + 14 \cdot (-3) + 11 \cdot 0 + 10 \cdot 5 = 2.$$

Így a duális *minden* megoldásához tartozó célfüggvényérték 2, ezért a duális minimumértéke is 2.

Mivel a primál rendszere megoldható (egy megoldást megad a feladat) és a duális megoldhatóságából a tanult tétel szerint a primál célfüggvényértékének felülről korlátossága is következik, ezért alkalmazhatjuk a dualitástételt. Ebből következik, hogy a primál maximumértéke is 2. Mivel a megadott primál megoldáshoz tartozó célfüggvényérték is 2, ezért a válasz igen, a megadott megoldás a primál egy maximumhelye.

(Alternatív indoklásként mondhatjuk azt is, hogy a feladat által megadott primál megoldásból következik, hogy a primál maximuma legalább 2. Egy konkrét duális megoldást – például: $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3$, $y_4 = 0$, $y_5 = 5$ – megadva és azon a célfüggvényértéket kiszámítva kapjuk, hogy a duális minimuma legföljebb 2. De mivel a dualitástétel miatt a primál maximuma és a duális minimuma egyenlő, ez a közös érték csak 2 lehet. Így a megadott primál megoldás maximumhely.)

A 2. feladat megoldása.

a) A tanult definíció szerint c akkor címkézés, ha $c(a_i) + c(b_j) \geq m_{i,j}$ teljesül minden $1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 5$ értékekre, ahol $m_{i,j}$ a megadott mátrix megfelelő elemét jelöli. Az $i = 1$, $j = 3$ esetben ez azt jelenti, hogy $p + 3 \geq 8$, vagyis $p \geq 5$. Hasonlóan, az $i = 3$, $j = 2$ esetben a $(12 - p) + 2 \geq 9$, vagyis $p \leq 5$ feltételt kapjuk. Ebből az derül ki, hogy a p egyetlen szóba jövő értéke a $p = 5$ – de azt még meg kell vizsgálnunk, hogy ebben az esetben c címkézés-e. Ehhez a $c(a_1) = 5$, $c(b_2) = 12 - 5 = 7$ értékek mellett a gráf további 18 élét (vagyis a mátrix további 18 elemét) kell megvizsgálnunk: azt tapasztaljuk, hogy $c(a_i) + c(b_j) \geq m_{i,j}$ minden esetben teljesül. Így c pontosan akkor címkézés, ha $p = 5$.

b) A tanult Egerváry-tételből tudjuk, hogy a maximális súlyú párosítás összsúlya megegyezik a címkék összegével egy minimális összegű, nemnegatív értékű címkézésben. Az a) feladatban (a $p = 5$ esetben) egy nemnegatív értékű címkézést kaptunk, amelyben a címkék összege 31. Azt egyelőre nem tudjuk, hogy ez a címkézés minimális összegű-e (a nemnegatív értékű címkézések között), de az mindenképp következik belőle, hogy a minimális címkeösszeg értéke (ismét a nemnegatív értékű címkézések között) *legföljebb* 31. Ebből tehát az Egerváry-tétel szerint következik, hogy a maximális összsúlyú párosítás összsúlya is legföljebb 31. Mivel a feladatban megadott párosítás összsúlya $8 + 6 + 9 + 8 = 31$, ezért ez maximális összsúlyú kell legyen.

(A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a feladat fenti megoldásában valójában csak azt az Egerváry-tételnél jóval egyszerűbb állítást használtuk, hogy a maximális összsúlyú párosítás összsúlya *legföljebb* akkora, mint a címkék összege egy minimális összegű, nemnegatív értékű címkézésben. Egy 31 összsúlyú párosításból és egy 31 összegű, nemnegatív értékű címkézésből már csupán ennyit használva is következik, hogy a párosítás maximális összsúlyú és mellesleg a címkézés minimális összegű a nemnegatív értékű címkézések között.)

Alternatív megoldásként persze használhatnánk az előadáson tanult algoritmust is egy maximális összsúlyú párosítás megkeresésére. Ehhez először A-t ki kellene egészítenünk egy új, „virtuális” csúccsal, ezt összkötnünk B minden elemével, a létrejövő 5 él mindegyikének 0 súlyt kellene adnunk, majd a kapott gráfban lefuttatnunk a maximális összsúlyú *teljes* párosítás megkeresésére szolgáló Egerváry-algoritmust (illetve végül annak a kimenetéből el kellene hagynunk az A virtuális csúcsára illeszkedő élt). Ez a megoldás tehát elvileg szintén jó volna, de a fentinél sokkal hosszadalmasabb.

A 3. feladat megoldása. Jelölje a mátrix oszlopait sorban a, b, c és d. A matroid megismeréséhez azt kell megvizsgálnunk, hogy x különböző értékeire mely oszlophalmazok lineárisan függetlenek. Mivel az oszlopok térvektorok (vagyis $\mathbb{R}^3$-beliek), ezért a négy oszlop együtt nyilván lineárisan összefüggő.

A négy darab háromelemű oszlophalmaz függetlenségének vizsgálata legegyszerűbben talán a megfelelő 3×3-as determinánsok vizsgálatával történhet. Például az $\{a, c, d\}$ halmazra a számítás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & x-5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (x-5),$$

amiből látszik, hogy $\{a, c, d\}$ csak az $x = 5$ esetben összefüggő, minden más x értékre független. A másik három esetben hasonló számítással azt kapjuk, hogy az $\{a, b, c\}$ halmaz összefüggő, $\{a, b, d\}$ és $\{b, c, d\}$ pedig szintén az $x = 5$ esetben összefüggő, egyébként független. Az is látszik, hogy a mátrix x semmilyen értékére sem tartalmaz két összefüggő oszlopot, vagyis a két elemű részhalmazok még mind függetlenek.

A fentiek alapján két esetet kell megkülönböztetnünk. Az $x = 5$ esetben pontosan a legföljebb 2 elemű részhalmazok függetlenek, vagyis ilyenkor $\mathcal{M}_x$ az $U_{4,2}$ matroiddal izomorf, így (a tanultak szerint) nem grafikus.

Ha viszont $x \neq 5$, akkor a 3 elemű részhalmazok közül csak az $\{a, b, c\}$ összefüggő (és ezen kívül már csak a teljes alaphalmaz összefüggő). Ezért ebben az esetben $\mathcal{M}_x$ grafikus: reprezentálható például azzal a négy csúcsú gráffal, amelyet egy háromszögből kapunk úgy, hogy egy negyedik élet „lelógatunk” róla (és ez az él felel meg d-nek).

A 4. feladat megoldása. Az $\mathcal{A}$ matroidban definíció szerint azok a legföljebb 2 elemű részhalmazok függetlenek, amelyek az $\{a, b, c, d\}$ halmazból legföljebb egy elemet tartalmaznak (és emellett tartalmazhatják még e-t). Az $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ függetlenjei tehát azok a részhalmazok, amelyek két ilyen halmaz uniójaként előállhatnak. Így az $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ függetlenjei azok a legföljebb 3 elemű halmazok, amelyek az $\{a, b, c, d\}$ halmazból legföljebb 2 elemet tartalmaznak (és emellett tartalmazhatják még e-t). Következésképp $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ izomorf az $U_{4,2}$ és az $U_{1,1}$ uniform matroidok direkt összegével (ahol az $U_{1,1}$ egyetlen elemének e felel meg). Így a tanultak szerint $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ nem grafikus, mert van az $U_{4,2}$-vel izomorf minorja.

Hasonlóan az $\mathcal{A}$-hoz, $\mathcal{B}$ függetlenjei azok a legföljebb 2 elemű részhalmazok, amelyek az $\{a, b, c, e\}$ halmazból legföljebb egy elemet tartalmaznak (és emellett tartalmazhatják még d-t). Az $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ meghatározásához tehát ezeknek és az $\mathcal{A}$ függetlenjeinek az unióját kell képezni. Rögtön látszik, hogy $\{a, b, c\}$ összefüggő lesz $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$-ben, mert a, b és c közül bárhogyan kettőt választva $\mathcal{A}$-ban és $\mathcal{B}$-ben is összefüggő halmazt kapunk. Független viszont minden 4 elemű részhalmaz, amely $\{a, b, c\}$-t nem tartalmazza: például $\{a, b, d, e\}$ előáll az $\{a, e\}$ $\mathcal{A}$-beli, és a $\{b, d\}$ $\mathcal{B}$-beli függetlenek uniójaként (és hasonlóan mutatható meg a másik két eset is). Ezért $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ grafikus: reprezentálható például azzal az öt csúcsú gráffal, amelyet egy háromszögből kapunk úgy, hogy két további élet „lelógatunk" róla (és ez a két felel meg d-nek, illetve e-nek).

Az 5. feladat megoldása. A csúcsok közt három féle síkbeli távolság lehetséges: a hatszögön szomszédos csúcsok távolsága 1, ugyancsak 1 G és bármely más csúcs távolsága. A hatszögön másodszomszédos csúcsok távolsága $\sqrt{3}$, a szemköztieké 2. Ez alapján a megadott súlyozás nem lesz metrikus, a feladat megoldását tehát metrizálással kell kezdenünk. Ehhez meg kell állapítanunk az összes csúcspárra a köztük lévő legrövidebb út hosszát. Ez G és bármely más csúcs esetén 1, a hatszögön szomszédos csúcsok esetén $\frac{3}{2}$, bármely más csúcspár esetén 2 (mivel $\sqrt{3} + \frac{1}{2} > 2$). Ezek lesznek tehát a metrizálás után kapott gráf élsúlyai. Következő lépésként minimális összsúlyú feszítőfát kell keresnünk a B, C, E, F csúcsok által feszített részgráfban. Ebben benne lesz a BC és az EF él, melyek súlya $\frac{3}{2}$, valamint a maradék négy szóba jövő él közül egy tetszőleges (hiszen ezeknek egyaránt 2 a súlya), mondjuk CE. Ezzel a metrizált gráf egy Steiner-fáját kapjuk, amit az utolsó lépésben átalakítunk az eredeti gráf Steiner-fájává. Ehhez a szereplő éleknek megfelelő pontpárok közti legrövidebb utakat kell vennünk az eredeti gráfban. Ezek a BC és EF esetében maguk az élek, CE esetében a CGE út, az algoritmus tehát a BC, CG, GE, EF élekből álló fát adja kimenetként.

A 6. feladat megoldása. Az állítás nem igaz. Legyen G egy 8 csúcsú és egy 2 csúcsú teljes gráf diszjunkt uniója, erre nyilván teljesül $\tau(G) = 8$. A tanult algoritmusok akkor (és csak akkor) találnak 8 csúcsú lefogó ponthalmazt, ha az általuk talált nem bővíthető párosítás 4 élű. Könnyen látható azonban, hogy G-nek nincs ilyen párosítása: a különálló él minden nem bővíthető párosításban szerepel (hiszen a végpontjaira más él nem illeszkedik), így mivel a gráf többi csúcsa teljes részgráfot feszít, a nem bővíthető párosítások mind 5 élűek lesznek.