Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2012. április 16.

1. A $G(F, L; E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $F = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $L = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen a balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem (minden $1 \leq i, j \leq 5$ esetén). Valaki már elkezdte futtatni G-re a maximális összsúlyú teljes párosítás keresésére szolgáló Egerváry-algoritmust: éppen ott tart, hogy az aktuális M párosítás az $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$ és $\{a_3, b_3\}$ élekből áll, az aktuális c címkézés pedig a jobb oldali táblázatban látható. Hajtsuk végre az algoritmus (egyetlen) következő ciklusát, vagyis határozzuk meg az algoritmus futása során előálló következő M' párosítást és c' címkézést!

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c(v)$	:	5	3	5	6	2	2	1	1	0	1

(Az algoritmust tehát *nem szükséges* leállásig futtatni, elég a következő ciklus utáni állapotot megadni. Ha a ciklus végrehajtása nem egyértelmű – vagyis több, az algoritmus helyes futásának megfelelő változat is lehetséges, – akkor elég ezek közül egyet megadni.)

2. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

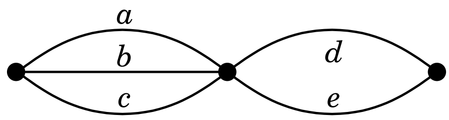
b) Adjuk meg a (primál) feladat maximumértékét!

$\max\{x_1 + 6x_2 - x_4\}$
ha
$2x_2 - 7x_3 - x_4 \leq -1$
$2x_1 + 5x_3 + 3x_4 \geq 6$
$7x_1 + 5x_2 - 4x_4 \leq 0$
$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

3. Hányféle nemizomorf matroidot reprezentálhat a valós test felett az alábbi mátrix az x különböző választásai mellett? Ahol a matroid grafikus, ott gráffal is adjuk meg!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & x \end{pmatrix}$$

4. Az ábrán látható gráf körmatroidja legyen $\mathcal{M}$. Határozzuk meg az $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}$ és az $\mathcal{M} \vee U_{5,2}$ matroidösszegeket! Ahol az összeg grafikus, ott gráffal is adjuk meg!



5. Adjunk 2-approximációs algoritmust a maximális független ponthalmaz keresésének problémájára olyan bemenetek esetére, melyekre a független pontok maximális száma legalább $\frac{2n}{3}$, ahol n a bemeneti gráf csúcsszáma. Az algoritmus működését szemléltessük is a $K_{2,5}$ teljes páros gráfon.

6. Hajtsuk végre és dokumentáljuk a RÉSZÖSSZEG problémára tanult $(1 + \varepsilon)$-approximációs algoritmust az alábbi bemenetre.

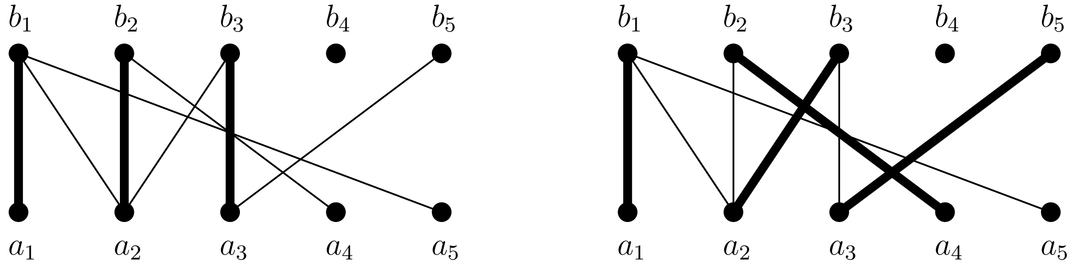
$$2, 6, 7, 14, 28, 44; \quad t = 49; \quad \varepsilon = \tfrac{1}{2}$$

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása. Az algoritmus futása során előálló következő M' párosítás meghatározásához először a „piros éleket” kell megkeresni, vagyis azokat az $e = \{a, b\}$ éleket, amelyekre $w(e) = c(a) + c(b)$ teljesül (ahol $w(e)$ az e él súlyát jelöli). A megadott adatokból könnyen kiolvasható, hogy a piros élek a következők: $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, $\{a_2, b_3\}$, $\{a_3, b_3\}$, $\{a_3, b_5\}$, $\{a_4, b_2\}$ és $\{a_5, b_1\}$; lásd az alábbi, bal oldali ábrát. (Látszik az is, hogy a megadott M párosítás élei – az ábrán vastag vonallal – is pirosak; ha ez nem volna így, az azt jelentené, hogy az algoritmus korábbi futása hibás volt.)

Ezek után M' meghatározásához M-ből kiindulva futtatni kell a maximális párosítás keresésére szolgáló javító utas algoritmust a piros élek alkotta részgráfban. A párosítatlan F-beli pontok: a_4 és a_5. Látható, hogy a_5-ből nem vezet javító út párosítatlan L-beli pontba (vagyis b_4-be vagy b_5-be), mert a_5-ből piros élen egyedül b_1-be lehet lépni, ennek az M szerinti párjából, a_1-ből viszont nem lehet továbblépni. Ezzel szemben a_4-ből indítva a javítóút keresést hamar sikerrel járunk: az a_4, b_2, a_2, b_3, a_3, b_5 sorrendben bejárva a csúcsokat javítóutat kapunk; ementén javítva a következő párosítást kapjuk: $\{a_4, b_2\}$, $\{a_2, b_3\}$, $\{a_3, b_5\}$, $\{a_1, b_1\}$ (lásd a jobb oldali ábrát).



Egyelőre nem biztos, hogy ezzel már megkaptuk a keresett M' párosítást, mert előfordulhatna, hogy a most kapott párosítás még nem maximális a piros részgráfban. Azonban nem ez a helyzet: b_4-re nem illeszkedik piros él, így nyilván nincs öt élű párosítás a piros részgráfban. Ezért M' a javítás után kapott fenti négy élből áll.

A következő c' címkézés meghatározásához először meg kell határoznunk az F-beli párosítatlan csúcsokból (jelenleg ez csak a_5-öt jelenti) alternáló úton elérhető L-belieket, illetve ezek F-beli párjait. a_5-ből azonban továbbra is csak b_1-be vezet piros él, ahonnan a_1-be lépve elakadunk, így b_1 az egyetlen ilyen L-beli csúcs (amelynek F-beli párja tehát a_1). Így az algoritmus működési szabálya szerint az $\{a_1, a_5\}$ és $\{b_2, b_3, b_4, b_5\}$ halmazok közti éleket kell vizsgálnunk: ezek mindegyikére ki kell számítani a $c(a) + c(b) - w(e)$ „fölösleget”, majd ezek minimumát kell venni. A feladat adatait felhasználva az a_1-ből induló (és $\{b_2, b_3, b_4, b_5\}$-be menő) élek fölöslegei rendre 2, 3, 2 és 2, az a_5-ből induló élek fölöslegei pedig 2, 2, 2 és 3. Ezeknek a minimuma pedig $\delta = 2$.

Ezek után c' meghatározásához azokon az F-beli csúcsokon kell δ-val csökkenteni a jelenlegi címkézést, amelyek párosítatlanok, vagy amelyeknek a párja altenáló úton elérhető; ezek tehát a_1 és a_5. Hasonlóan, az alternáló úton elérhető L-belieken – vagyis most csak b_1-en – kell δ-val növelni az aktuális címkézést. Így tehát a keresett címkézés:

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c'(v)$	:	3	3	5	6	0	4	1	1	0	1

Az 2. feladat megoldása.

a) A megadott lineáris programban a változók nemnegativitása is szerepel a feltételek között, ezért érdemes azt (a második egyenlőtlenség (-1)-gyel szorzása után) $\max\{cx : Ax \le b, x \ge 0\}$ alakúnak tekinteni, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 & -1 \\ -2 & 0 & -5 & -3 \\ 7 & 5 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a duálist a tanult $\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{aligned}
&\min\{-y_1 - 6y_2 + y_4\}\\
&\text{ha}\\
&-2y_2 + 7y_3 + y_4 \geq 1\\
&2y_1 + 5y_3 + 3y_4 \geq 6\\
&-7y_1 - 5y_2 + 4y_4 \geq 0\\
&-y_1 - 3y_2 - 4y_3 \geq -1\\
&y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0
\end{aligned}$$

(Megjegyezzük, hogy a primál feladatot felfoghatjuk $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakúnak is és erre használhatjuk a duális eredeti definíció szerinti alakját, vagyis a $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ alakot. Ekkor a változók nemnegativitását előíró négy egyenlőtlenség is az $Ax \leq b$ rendszer része, vagyis A-nak és b-nek 8 sora van. Ennek megfelelően a duális egy 8 változós lineáris program – amely azonban az előadáson tanultak szerint ekvivalens a fent kapottal.)

b) A kapott duális feladatot megvizsgálva azonnal látszik, hogy annak az egyenlőtlenségrendszere azonos a primál feladatéval; valóban, a duális 1., 3. és 4. egyenlőtlenségét (-1)-gyel szorozva a primál megfelelő egyenlőtlenségét kapjuk, a 2. egyenlőtlenségek pedig eleve azonosak. Következésképp a primál és a duális megoldáshalmaza is azonos (eltekintve attól, hogy a primál esetében a változókat oszlopvektorban, a duális esetében sorvektorban tároltuk).

A két feladat célfüggvényét összevetve az is látszik, hogy ezek egymás ellentettjei. Azonban könnyen látható (és az előadáson is szerepelt), hogy a $-y_1 - 6y_2 + y_4$ célfüggvény minimalizálása és az $y_1 + 6y_2 - y_4$ célfüggvény maximalizálása (ugyanazon a megoldáshalmazon) egymással ekvivalens feladatok: a két feladat optimumhelyei azonosak, az optimumértékek pedig egymás ellentettjei.

A dualitástétel értelmében a primál feladat maximuma megegyezik a duális minimumával; ebből és a fentiekből következik, hogy primál maximuma sajátmagának az ellentettjével egyenlő. Következésképp a primál feladat maximumértéke 0.

Persze a dualitástétel alkalmazásához még ellenőrizni kell, hogy a primál feladat rendszere valóban megoldható és a célfüggvénye felülről korlátos a megoldáshalmazán. A megoldhatóság könnyen látszik: például az $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ és $x_4 = 2$ választással megoldást kapunk. Ebből persze a duális megoldhatósága is következik (hiszen a két megoldáshalmaz most azonos), így a tanult tétel értelmében a primál célfüggvénye felülről korlátos.

Az 3. feladat megoldása. Jelölje a mátrix oszlopait sorban a, b, c és d. Az matroid megismeréséhez azt kell megvizsgálnunk, hogy x különböző értékeire mely oszlophalmazok lineárisan függetlenek. Mivel az oszlopok térvektorok (vagyis $\mathbb{R}^3$-beliek), ezért a négy oszlop együtt nyilván lineárisan összefüggő.

A négy darab háromelemű oszlophalmaz függetlenségének vizsgálata legegyszerűbben talán a megfelelő 3×3-as determinánsok vizsgálatával történhet. Például az $\{a, c, d\}$ halmazra a számítás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & x-4 \end{vmatrix} = 2(x-4),$$

amiből látszik, hogy $\{a, c, d\}$ csak az $x = 4$ esetben összefüggő, minden más x értékre független. A másik három esetben hasonló számítással azt kapjuk, hogy az $\{a, b, c\}$ halmaz mindenképp független, az $\{a, b, d\}$ és a $\{b, c, d\}$ halmaz pedig az $x = 2$ esetben összefüggő, egyébként független. Az is látszik, hogy az $x = 2$ esetben az utóbbi két halmaz azért összefüggő, mert b párhuzamos d-vel.

A fentiek alapján három esetet kell megkülönböztetnünk. Az $x = 2$ esetben $b \parallel d$, de bármely, a b és d elemek közül legföljebb egyet tartalmazó három elemszámú halmaz független. Ezért a matroid grafikus, reprezentálható például egy olyan három élű úttal, amelynek az egyik élét megdupláztuk (és a két párhuzamos él felel meg b-nek és d-nek).

Az $x = 4$ esetben az $\{a, c, d\}$ halmaz összefüggő, de minden más, három elemszámú halmaz független (és így párhuzamos elemek sincsenek). Ezért a matroid megint grafikus, reprezentálható például azzal a négy csúcsú gráffal, amelyet egy háromszögből kapunk úgy, hogy egy negyedik élet „lelógatunk” róla (és ez az él felel meg b-nek).

Végül ha $x \neq 2$ és $x \neq 4$, akkor minden három elemű részhalmaz független, így a matroid $U_{4,3}$-mal izomorf. Ez is grafikus matroid, reprezentálja egy négy élű kör.

Ezek szerint tehát x különböző értékeire háromféle nemizomorf matroidot kaphatunk.

Az 4. feladat megoldása. Az $\mathcal{M}$ matroidban definíció szerint azok a részhalmazok függetlenek, amelyek az $\{a, b, c\}$ és a $\{d, e\}$ halmazból is legföljebb egy-egy elemet tartalmaznak. Az $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}$ matroid függetlenjei tehát azok a részhalmazok, amelyek két ilyen halmaz uniójaként előállhatnak. Ez nyilván nem teljesül az $\{a, b, c\}$ halmazra (hiszen a két egyesítendő részhalmaz mindegyike csak egyet tartalmazhat eközül a három elem közül). Ebből következően (mivel matroidban a függetlenek részhalmazai is függetlenek) a négyelemű részhalmazok közül sem függetlenek azok, amelyek $\{a, b, c\}$-t tartalmazzák (és pláne nem független az $\{a, b, c, d, e\}$ alaphalmaz). Azonban könnyű végiggondolni, hogy az $\{a, b, c\}$-t nem tartalmazó négyeleműek már függetlenek: $\{a, b, d, e\} = \{a, d\} \cup \{b, e\}$, $\{a, c, d, e\} = \{a, d\} \cup \{c, e\}$ és $\{b, c, d, e\} = \{b, d\} \cup \{c, e\}$ (mindhárom esetben az egyenlet jobb oldalán álló kételemű részhalmazok függetlenek $\mathcal{M}$-ben). A fentiekből következik, hogy $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}$ grafikus matroid: reprezentálja például az az öt csúcsú gráf, amelyet egy háromszögből kapunk úgy, hogy két élet „lelógatunk” róla (és ezek felelnek meg d-nek és e-nek).

Az $\mathcal{M} \vee U_{5,2}$ matroid függetlenjei definícó szerint azok a részhalmazok, amelyek $\mathcal{M}$ egy függetlenjéből legföljebb két további, tetszőleges elem hozzávételével megkaphatók. Az $\{a, b, c, d, e\}$ alaphalmaz így továbbra sem független (hiszen két, legföljebb kételemű részhalmazt egyesítünk), azonban könnyen ellenőrizhető, hogy most már minden négyelemű részhalmaz független. Mivel $\mathcal{M} \vee U_{5,2}$ függetlenjeinek halmaza (definíció szerint) nyilván bővebb a fent vizsgált $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}$ függetlenjeinek halmazánál, ezért ezt elég a két „hiányzó” négyelemű részhalmazra megvizsgálni: $\{a, b, c, d\} = \{a, d\} \cup \{b, c\}$ és $\{a, b, c, e\} = \{a, e\} \cup \{b, c\}$ (ahol a kéttagú uniókban a baloldali tag $\mathcal{M}$-beli, a jobboldali $U_{5,2}$-beli független). Ezek szerint $\mathcal{M} \vee U_{5,2}$ az $U_{5,4}$ matroiddal izomorf és így grafikus is: reprezentálja egy 5 élű kör.

Az 5. feladat megoldása. Tudjuk, hogy egy csúcshalmaz akkor és csak akkor független, ha a komplementere lefogó. Keressünk a gráfban (például mohón) egy nem bővíthető párosítást. A párosítás végpontjai által alkotott halmaz legyen L. Tudjuk, hogy L lefogó, a komplementere, $\overline{L}$ tehát független. Megmutatjuk, hogy $\overline{L}$ legalább feleakkora, mint a maximális független ponthalmaz (ezzel igazolva, hogy algoritmusunk approximációs faktora csakugyan 2, az eljárás polinomialitása nyilvánvaló). Mivel $n - |\overline{L}| = |L| \leq 2\nu(G) \leq 2\tau(G)$, tehát

$$|\overline{L}| \geq n - 2\tau(G) = \alpha(G) - \tau(G) \geq \frac{\alpha(G)}{2} + \frac{\alpha(G)}{2} - \tau(G) \geq \frac{\alpha(G)}{2},$$

felhasználva az $\alpha(G) + \tau(G) = n$ egyenlőséget, a (feladat szövegében adott) $\frac{\alpha(G)}{2} \geq \frac{n}{3}$ egyenlőtlenséget és az ezekből adódó $\tau(G) \leq \frac{n}{3}$ egyenlőtlenséget.

A $K_{2,5}$ teljes páros gráfon való alkalmazáshoz legyenek a csúcsok $K_{2,5}$ egyik osztályában 1 és 2, a másik osztályában A, B, C, D, E. Egy nem bővíthető párosítás 2 élből fog állni, az egyik tartalmazza az 1-et (pl. $1A$), a másik a 2-t (pl. $2B$). Az algoritmus által kimenetként adott ponthalmaz tehát ez esetben a $\{C, D, E\}$ halmaz lesz.

Az 6. feladat megoldása. A tanult módon (eltolásokkal, törlésekkel és összefésülésekkel) elkészítjük a részösszegek listáit, minden fázisban $\delta = \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{1}{24}$-del ritkítva. Ez azt jelenti, hogy 24-nél kisebb számok senkit nem tudnak képviselni, a 24 és 47 közti számok a náluk eggyel nagyobbat tudják képviselni, az ennél nagyobb számok tudnának két számot is képviselni, erre azonban nem fog sor kerülni, hiszen 49-nél nagyobb számokat nem veszünk fel a listákba.

$L_0 = \{0\}, L_0' = \{2\}, L_1 = \{0, 2\}$, itt ritkítani nem lehet. $L_1' = \{6, 8\}, L_2 = \{0, 2, 6, 8\}$, ritkítani nem lehet.

$L_2' = \{7, 9, 13, 15\}$, $L_3 = \{0, 2, 6, 7, 8, 9, 13, 15\}$, ritkítani nem lehet.

$L_3' = \{14, 16, 20, 21, 22, 23, 27, 29\}$, $L_4 = \{0, 2, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 27, 29\}$, ritkítani továbbra sem lehet.

$L_4' = \{28, 30, 34, 35, 36, 37, 41, 42, 43, 44, 48, 49\}$, hiszen a 49-nél nagyobb elemeket nem vesszük be a listába.

$L_5 = \{0, 2, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 27, 28, 29, 30, 34, 35, 36, 37, 41, 42, 43, 44, 48, 49\}$, itt a ritkítás során töröljük a 28,30,35,37,42,44,49 elemeket, ezt követően tehát

$L_5 = \{0, 2, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 27, 29, 34, 36, 41, 43, 48\}$.

$L_5' = \{44, 46\}$, hiszen a 49-nél nagyobb elemeket nem vesszük be a listába.

$L_6 = \{0, 2, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 27, 29, 34, 36, 41, 43, 44, 46, 48\}$. Itt már nem muszáj ritkítani (ha mégis ritkítunk, akkor a 44-et kell törölni), az algoritmus kimenete az utolsó lista legnagyobb eleme, azaz 48.