Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2010. április 28.

1. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Igaz-e, hogy az $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ választással a primál feladat optimális megoldását adtuk meg? Igaz-e, hogy az $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$, $y_4 = 0$ választással a duális feladat optimális megoldását adtuk meg?

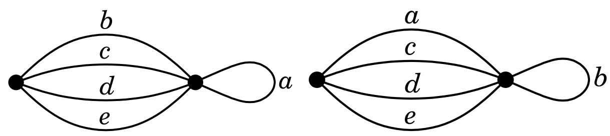
$$\begin{array}{l} \max\{6x_1 + 6x_2 + 6x_3\} \\ \text{ha} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 2 \end{array}$$

2. Nevezzünk egy mátrixot *unalmasnak*, ha minden eleme 0, 1 vagy -1 és minden sorában legföljebb két nemnulla elem van. Mutassuk meg, hogy a Fourier-Motzkin elimináció apró módosításával olyan, polinomiális lépésszámú algoritmus adható, amely az $Ax \le b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldhatóságát eldönti abban az esetben, ha A unalmas mátrix.

3. Koordinátázza az alábbi mátrix a T test fölött az $\mathcal{M}(T)$ matroidot. Mutassuk meg, hogy vannak olyan T_1, T_2 testek, melyek esetén $\mathcal{M}(T_1)$ nem izomorf $\mathcal{M}(T_2)$-vel!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. A bal oldali ábrán látható gráf körmatroidja legyen $\mathcal{A}$, a jobb oldalin láthatóé $\mathcal{B}$. Uniformak-e az $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$, illetve az $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ matroidok?



5. Tekintsük az $\{$a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,r,s,t,w,y$\}$ betűhalmazt, és az elemeiből képzett alábbi szavakat, mint részhalmazokat (a szavak utáni zárójelben lévő szám jelenti az adott halmaz költségét):

`ike (3), chef (3), jimbo (3), stan (4), mackey (4),`
`kyle (5), wendy (5), liane (6), randy (6), gerald (6).`

Hajtsuk végre ezen adatokkal az alaphalmaz részhalmazokkal történő lefedésére szolgáló, előadáson tanult közelítő algoritmust.

6. Hajtsuk végre és dokumentáljuk a RÉSZÖSSZEG problémára tanult $(1+\varepsilon)$-approximációs algoritmust az alábbi bemenetre.

$4, 6, 9, 14, 22; \quad t = 34; \quad \varepsilon = 2$

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása.

a) A feladat $\max\{cx : Ax \le b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ezért a feladat duálisa $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$. Ezt részletesebben kiírva és az $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ jelölést alkalmazva:

$$\begin{aligned}
&\min\{y_1 + 3y_2 + 8y_3 + 2y_4\} \\
&\text{ha} \\
&y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 = 6 \\
&2y_1 + 3y_2 + y_3 + 5y_4 = 6 \\
&3y_1 + y_2 + 2y_3 = 6 \\
&y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0
\end{aligned}$$

b) A megadott x_1, x_2, x_3 értékeket a primál egyenlőtlenségeibe, az y_1, y_2, y_3, y_4 értékeket a duális egyenleteibe (és nemnegativitást előíró egyenlőtlenségeibe) helyettesítve látszik, hogy valóban a primál, illetve a duális egy-egy megoldását adtuk meg. Mindkét esetben kiszámítva a megfelelő célfüggvényértékeket ($cx = 6 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 12$, illetve $yb = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 8 = 12$) azt kapjuk, hogy ezek megegyeznek. Ebből pedig következik, hogy mindkét esetben optimális megoldásról van szó. (Ugyanis ismert, hogy a primál feladat tetszőleges x' és a duális tetszőleges y' megoldására $cx' \le y'b$ áll fenn. Így tetszőleges x' megoldásra $cx' \le yb = 12$, vagyis 12-nél nagyobb célfüggvényértéket adó primál megoldás nem lehet, x tehát optimális. A duális esetében az indoklás analóg.)

A 2. feladat megoldása. Először megmutatjuk, hogy a Fourier-Motzkin elimináció (apró kiegészítéssel) fenntartja azt a tulajdonságot, hogy a rendszert leíró mátrix unalmas. Tegyük fel ugyanis, hogy a (kibővített együtthatómátrixával megadott) $(A|b)$ rendszerre az elimináció egy lépését alkalmazva a $(A^*|b^*)$ rendszert kapjuk. Ha az $(A^*|b^*)$ egyik sora az $(A|b)$ egyik 0-val kezdődő sorának másolata (levágva belőle az első, 0 elemet), akkor ez a sor persze továbbra is megfelel az unalmasság kritériumának. Ha viszont az $(A^*|b^*)$ rendszer $(a^*_k|b^*_k)$ sora az $(A|b)$ 1-essel kezdődő $(a_i|b_i)$ és (-1)-essel kezdődő $(a_j|b_j)$ sorának összegéből keletkezett, akkor a_i-ben és a_j-ben is legföljebb 1 további nemnulla elem lehet. Feltehető, hogy mindkettőben pontosan 1 van, különben a^*_k-nak is legföljebb csak 1 nemnulla eleme lesz (és az is ± 1). Ha az a_i-beli és a_j-beli (nem az első oszlopba eső) nemnulla elemek különböző oszlopban vannak, akkor a^*_k nyilván megfelel az unalmasság fogalmának. Ha viszont azonos oszlopban vannak, akkor a^*_k vagy a nullvektor, vagy pedig egyetlen nemnulla eleme van és az ± 2. Ebben az esetben viszont nyilván leoszthatjuk $(a^*_k|b^*_k)$-ot 2-vel, hogy az továbbra is megfeleljen az unalmasság definíciójának. (Ez tehát az említett apró kiegészítés.)

Most megmutatjuk, hogy az algoritmus (apró módosításának) futása közben a sorok száma mindig legföljebb $O(n^2)$ marad (ahol n az A oszlopainak száma). Ebből nyilván következni fog a polinomiális futásidő (hiszen m sorú A estén $(A^*|b^*)$ nyilván $O(m^2)$ lépésben megkapható). Könnyen látszik, hogy ha A unalmas n oszlopú mátrix, akkor legföljebb $4\binom{n}{2} + 2n + 1 = O(n^2)$ féle sora lehet (ahol az összeadandók a 2, 1, illetve 0 darab nemnulla elemet tartalmazó sorok számának felelnek meg). Az persze előfordulhat, hogy valamelyik sortípus többször is előfordul az $(A^*|b^*)$-ban; ekkor azonban ezek közül egy kivételével nyilván mind fölösleges és elhagyható. (Ha például az $(a^*_k|b^*_k)$ és $(a^*_l|b^*_l)$ sorokra $a^*_k = a^*_l$ és $b^*_k \le b^*_l$, akkor az utóbbi fölösleges.) Így az elimináció minden lépése után az így adódó fölösleges sorokat elhagyva (ezzel tehát az algoritmust másodszor is némileg módosítva) elérhető a sorok számára említett korlát és ezzel a polinomiális lépésszám.

A 3. feladat megoldása. Legyen T_1 a 3 elemű test. Azonnal látszik, hogy ekkor a mátrix oszlopait összeadva a nullvektort kapjuk (hiszen ebben a testben $1+1+1=0$). Így a 3 elemű test felett az oszlopok lineárisan összefüggőek, vagyis a mátrix *nem* az $U_{4,4}$ szabad matroidot koordinátázza (hanem az $U_{4,3}$ matroidot – bár ennek a megállapítása nem szükséges a feladat megoldásához). Azonban például $T_2 = \mathbb{R}$ fölött a mátrix determinánsát meghatározva $-3 \neq 0$-t kapunk (a számolást mellőzzük), így az oszlopok lineárisan függetlenek, vagyis ekkor a matroid az $U_{4,4}$ szabad matroid.

A 4. feladat megoldása. A kapott összegmatroid (mindkét esetben) akkor uniform, ha pontosan a legföljebb k elemű részhalmazok függetlenek benne alkalmas k-ra ($0 \le k \le 5$).

Az $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ matroidban a nyilván továbbra is hurok lesz, a $\{b, c, d, e\}$ halmaznak viszont a legföljebb 2 elemű részhalmazai lesznek függetlenek. Ezért $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ nem uniform matroid (hanem izomorf az $U_{4,2} \oplus U_{1,0}$ matroiddal, ahol a $\oplus$ direkt összeget jelöl).

Az $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ matroid ezzel szemben izomorf az $U_{5,2}$ matroiddal. Az ugyanis világos, hogy a rangja 2 (hiszen sem $\mathcal{A}$-ban, sem $\mathcal{B}$-ben nincs 1-nél több elemű független) és azt is könnyű ellenőrizni, hogy bármely 2 elemű részhalmaz előáll egy $\mathcal{A}$-beli és egy $\mathcal{B}$-beli 1 elemű független uniójaként. (Valóban, minden 2 elemű részhalmaz egyik eleme a-tól, a másik b-től különbözik.)

Az 5. feladat megoldása. Az algoritmus mindig azt a részhalmazt választja ki, amelyre a lehető legkisebb a halmaz költségének és az újonnan lefedett elemek számának hányadosa.

Az első lépésben a `jimbo` részhalmazt kell választanunk, mert ennek a legkisebb az egy elemre eső aktuális költsége ($\frac{3}{5}$). Ezt követően a `chef` részhalmaz jön, $\frac{3}{4}$ aktuális költséggel. A következő halmaz a `stan` kell legyen, ez újabb 4 elemet fed le, 4 költséggel, majd a `gerald` halmaz következik, ennek költsége $\frac{3}{2}$. Az ezt követő lépésben a `mackey` halmazra lesz a kérdéses érték minimális (2), az utolsó beválasztott szó pedig a `wendy`, 5-ös értékkel.

A kapott fedés tehát: $\{\texttt{jimbo}, \texttt{chef}, \texttt{stan}, \texttt{gerald}, \texttt{mackey}, \texttt{wendy}\}$, költsége 25.

A 6. feladat megoldása. Az exponenciális lépésszámú pontos megoldás során az L_i listában az első i elem által alkotott részösszegek szerepelnek, ezeket az $L_0 = \{0\}$, $L'_i = \{x + a_{i+1} \mid x \in L_i\}$, $L_{i+1} = L_i \cup L'_i$ képletekkel kapjuk. A közelítő algoritmusban szereplő listák ettől annyiban különböznek, hogy a t-nél nagyobb elemeket azonnal töröljük és az L_i listákat a $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$ értékkel ritkítjuk (azaz alulról kezdve töröljük azokat az x elemeket, melyekhez létezik olyan náluk kisebb nem törölt y elem, melyre $x \le (1+\delta)y$). Az algoritmus kimenete az L_n lista legnagyobb eleme. Esetünkben $n = 5$, így $\delta = 0,2$. A listák:

$L_0 = \{0\}, \ L'_0 = \{4\}$

$L_1 = \{0, 4\}, \ L'_1 = \{6, 10\}$

$L_2 = \{0, 4, 6, 10\}, \ L'_2 = \{9, 13, 15, 19\}$

$L_3 = \{0,4,6,9,\cancel{10},13,\cancel{15},19\}, \ L'_3 = \{14, 18, 20, 23, 27, 33\}$

$L_4 = \{0,4,6,9,13,\cancel{14},18,\cancel{19},\cancel{20},23,\cancel{27},33\}, \ L'_4 = \{22,26,28,31,\cancel{35},\cancel{40},\cancel{45},\cancel{55}\}$

$L_5 = \{0, 4, 6, 9, 13, 22, 23, 26, 28, 31, 33\}$,

tehát az algoritmus 33-at ad eredményként.