Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2009. április 29.

1. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy a duális feladat rendszere megoldható (ezt tehát igazolni nem kell). Döntsük el, hogy korlátos-e (a megfelelő irányból) a duális feladat célfüggvénye a megoldáshalmazán.

$$\begin{aligned}&\max\{2x+3y+5z\}\\&\text{ha}\\&3x+5y+7z\le 11\\&7x+11y+13z\ge -17\\&13x+17y+19z\le 23\\&19x+23y+29z\ge -31\end{aligned}$$

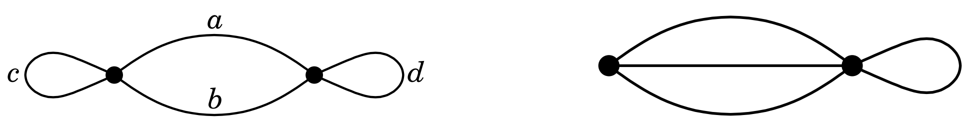
2. A $G(A,B;E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ és $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen i^2+j^3 minden $1\le i,j\le n$ esetén. Adjunk meg G-ben egy maximális összsúlyú teljes párosítást (és mutassuk meg róla, hogy maximális).

3. Az $M(a,b)$ matroidot az alábbi mátrix reprezentálja a valós test felett:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&a\\0&0&0&b\end{pmatrix}$$

Meg lehet-e b értékét úgy választani, hogy $M(a,b)$ az a értékétől függetlenül mindig grafikus legyen? Hát úgy, hogy sose legyen grafikus?

4. A második gráf éleiről „véletlenül” lemaradtak a betűk, nem tudjuk, hogy az a, b, c, d élek közül melyik a hurokél. Eldönthető-e azért, hogy a két gráf körmatroidjának az összege grafikus-e?



5. Tekintsük a Metrikus Utazóügynök probléma azon eseteit, ahol bármely két csúcs között létezik olyan út, amely csak 1 súlyú éleket használ. Igaz-e, hogy ezekben az esetekben polinom időben találhatunk olyan Hamilton-kört, melynek költsége legfeljebb $2n$ (ahol n a csúcsok száma)?

6. Mutassuk meg, hogy a Ládapakolás problémára adott First Fit Decreasing algoritmus approximációs faktora nem jobb, mint $\frac{3}{2}$.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása.

a) A feladat $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -7 & -11 & -13 \\ 13 & 17 & 19 \\ -19 & -23 & -29 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \\ 23 \\ 31 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ezért a feladat duálisa $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$. Ezt részletesebben kiírva és az $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ jelölést alkalmazva:

$$\begin{aligned} &\min\{11y_1 + 17y_2 + 23y_3 + 31y_4\} \\ &\text{ha} \\ &3y_1 - 7y_2 + 13y_3 - 19y_4 = 2 \\ &5y_1 - 11y_2 + 17y_3 - 23y_4 = 3 \\ &7y_1 - 13y_2 + 19y_3 - 29y_4 = 5 \\ &y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Mivel $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$, ezért $11y_1 + 17y_2 + 23y_3 + 31y_4 \geq 0$ nyilván fennáll, így a duális célfüggvénye alulról korlátos a megoldáshalmazán.

Megjegyzés. Általában ha a duális megoldható, akkor a duális célfüggvény alulról korlátosságának szükséges és elégséges feltétele a primál feladat megoldhatósága. Ez következik a Rendszeroptimalizálás könyv 1.6. Tételéből, valamint abból a tényből, hogy a duális feladat duálisa ekvivalens a primállal.

A 2. feladat megoldása. Legyen

$$c(v) = \begin{cases} i^2, & \text{ha } v \in A, v = a_i; \\ j^3, & \text{ha } v \in B, v = b_j. \end{cases}$$

Ekkor *minden* $e = \{a, b\}$ élre $w(e) = c(a) + c(b)$ teljesül (ahol w-vel a feladatban definiált súlyfüggvényt jelöltük). Ebből következik, hogy *tetszőleges* M teljes párosításra

$$\sum_{e=\{a,b\}\in M} w(e) = \sum_{e=\{a,b\}\in M} (c(a) + c(b)) = \sum_{v\in A\cup B} c(v) = \sum_{i=1}^{n} (i^2 + i^3).$$

Vagyis minden teljes párosítás összsúlya a fenti érték, így tetszőleges teljes párosítás (például az $\{a_1, b_1\}, \ldots, \{a_n, b_n\}$ élek) maximális összsúlyú.

A 3. feladat megoldása. Jelölje a mátrix oszlopait sorban x, y, z és u. Látható, hogy x, y és z közül semelyik kettő nem párhuzamos, de a három együtt lineárisan összefüggő (hiszen $x+y = z$). Tegyük fel először, hogy $b \neq 0$. Ekkor az $\{x, y, z\}$ bármely lineárisan független részhalmazához u-t hozzávéve a lineáris függetlenség nyilván megmarad, így ekkor a értékétől függetlenül az $M(a, b)$ matroidot reprezentálja az a gráf, amit egy négy pontú teljes gráfból két szomszédos él elhagyásával kapunk. Ezért a feladat első kérdésére a válasz igen: tetszőleges $b \neq 0$ választás esetén $M(a, b)$ minden a-ra grafikus.

Tegyük fel most, hogy $b = 0$. Ekkor a reprezentáló mátrix rangja nyilván 2, így a négy oszlop között már nem lesz három lineárisan független. Ha $a = 0$ vagy $a = 1$, akkor u egyenlő x-szel vagy z-vel, így ebben a két esetben $M(a, b)$ grafikus: reprezentálja az a gráf, amit egy háromszög egyik élének megduplázásával kapunk. Ezért a feladat második kérdésére a válasz nemleges, hiszen az $a = 0, 1$ esetekben $M(a, b)$ minden b-re grafikus.

Megjegyzés. A fennmaradó $b = 0$, $a \neq 0$, $a \neq 1$ esetekben $M(a, b)$ az $U_{4,2}$ uniform matroiddal izomorf, így nem grafikus.

A 4. feladat megoldása. Világos, hogy a bal oldali gráf körmatroidjának függetlenjei csak $\{a\}$, $\{b\}$ (és $\emptyset$). A jobb oldali gráf körmatroidjának nemüres függetlenjei pedig a három párhuzamos élnek megfelelő egyelemű halmaz. Így az összegmatroid rangja mindenképp 2.

Tegyük fel először, hogy a jobb oldali gráfban a hurokél a. Ekkor az összegmatroidban a $\{c, d\}$-t kivéve minden kételemű halmaz független (mert az összes többi kételemű halmaz előállítható úgy, hogy egyrészt a és b, másrészt pedig b, c és d közül választunk egy-egy elemet). Így ebben az esetben az összegmatroid grafikus: reprezentálja az a gráf, amelyet egy háromszög egyik élének megduplázásával kapunk és a két párhuzamos él c és d.

Teljesen hasonló a helyzet akkor, ha a hurokél b. Tegyük fel most, hogy a jobb oldali ábrán a hurokél c. Ekkor az összegmatroidban c hurok (mert mindkét matroidban az), viszont az $\{a, b, d\}$ halmaz minden kételemű részhalmaza könnyen láthatóan független. Ezért az összegmatroid megint grafikus: reprezentálja az a gráf, amit egy háromszög és egy hurokél alkot (ahol a hurokél c).

Mivel a legutolsó eset, amikor d hurokél, az előbbivel analóg, azt kapjuk, hogy az összegmatroid mindenképp grafikus; ez tehát a betűk ismerete nélkül is eldönthető.

Az 5. feladat megoldása. A feltétel szerint az összes csúcsból és az 1 súlyú élekből álló gráf összefüggő, így létezik az eredeti gráfnak csupa 1 súlyú élből álló feszítőfája. Ennek az éleit megduplázva, majd a kapott gráf (mely összefüggő és minden foka páros) Euler-körét az előadáson tanultak szerint levágva legfeljebb $2n-2$ súlyú Hamilton-kört kapunk (a levágások a metrikusság miatt nem növelik a költséget).

A 6. feladat megoldása. Legyen a ládák súlya (mondjuk) 13, az elhelyezendő tárgyak súlyai (mondjuk) 5,5,4,4,4,4. Az optimális megoldáshoz nyilván elég két láda, míg a FFD algoritmus először a két 5 súlyú tárgyat helyezi el, éspedig egy ládába. Ezután ebbe a ládába más már nem fér, így összesen három láda fog kelleni. Mivel meg tudtunk adni olyan esetet, ahol az algoritmus az optimum $\frac{3}{2}$-szeresét adja, az approximációs faktor nem lehet jobb, mint $\frac{3}{2}$.

Megjegyzés. Ismert, hogy a FFD algoritmus legfeljebb $\frac{11}{9}OPT + 4$ ládát használ, ez azonban nem ekvivalens azzal, hogy az approximációs faktora nem rosszabb, mint $\frac{11}{9}$.