Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2008. december 5.

1. A p paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ választással
a) bázismegoldását
b) erős bázismegoldását
adtuk meg az alábbi egyenlőtlenségrendszernek?

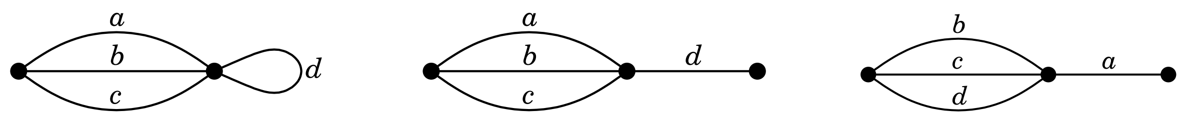
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\le 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 &\le 1 \\ x_1 + x_4 &\le 2 \\ x_3 + 2x_4 &\le p \end{aligned}$$

2. Legyen A egy $m \times n$-es mátrix, aminek az első oszlopa legyen b. Legyen továbbá c az az n hosszú sorvektor, amelynek minden komponense 1. Tegyük fel, hogy a cx célfüggvény felülről korlátos az $Ax \le b$ egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazán. Adjuk meg a $\max\{cx : Ax \le b\}$ maximum értékét!

3. Lehet-e a p paramétert úgy megválasztani, hogy az alábbi mátrixszal (a valós test fölött) koordinátázott matroid grafikus legyen?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & p \end{pmatrix}$$

4. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi három gráf körmatroidja közül bármelyik kettő összege grafikus!



5. Hajtsuk végre a Steiner-fa probléma alábbi bemenetére a tanult approximációs algoritmust és döntsük el, hogy optimális megoldást ad-e.
A G gráf pontjai a síkon egy szabályos nyolcszög csúcsaiban és a nyolcszög középpontjában helyezkednek el, bármely két csúcs össze van kötve és a köztük futó él költsége megegyezik a csúcsok síkon vett távolságával. A terminálok és a Steiner-pontok felváltva követik egymást a nyolcszögön, a középpont Steiner-pont (vagyis négy terminál lesz, a nyolcszög minden második csúcsa).

6. Mutassuk meg, hogy a Graham-féle listás ütemezés akkor sem ad feltétlenül optimális megoldást a $P||C_{\max}$ feladatra, ha a lista megmunkálási idők szerint monoton (de nem feltétlenül szigorúan monoton) csökkenő sorrendű.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása. Az egyenlőtlenségrendszer mátrixos alakja $Ax \leq b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ p \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy A harmadik sora az első két sorának összege, viszont az első, második és negyedik sor lineárisan független. Így $r(A) = 3$. A megadott $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ megoldás az A első, második és harmadik sorát biztosan egyenlőséggel teljesíti. Ha a negyediket nem, akkor az egyenlőséggel teljesülő sorok rangja csak 2, hiszen az már kiderült, hogy az első három sor lineárisan összefüggő. Ezért pontosan akkor kapunk bázismegoldást, ha a negyedik sor is egyenlőséggel teljesül, vagyis ha $p = 3$.

Erős bázismegoldást viszont még ebben az esetben sem kapunk, hiszen a megadott megoldás nemnulla komponenseinek (vagyis mindnek) megfelelő oszlopok az A összes oszlopa. Ezek pedig nyilván lineárisan összefüggők (hiszen A négyzetes mátrix, így az oszlopok és a sorok lineáris összefüggősége egymással ekvivalens).

A 2. feladat megoldása. Alkalmazhatjuk a dualitástételt, hiszen az $Ax \leq b$ egyenlőtlenségrendszer nyilván megoldható (hiszen megoldása az az x, amelynek az első komponense 1, az összes többi 0) és a feladat szövege szerint cx felülről korlátos a megoldáshalmazon. Így a keresett maximum értéke $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ (és a duális feladat megoldható és a célfüggvénye alulról korlátos a megoldáshalmazán). Mivel A első oszlopa ébben b, ezért az $yA = c$ lineáris egyenletrendszer első egyenlete éppen $yb = 1$. Vagyis a duális feladat *minden* y megoldására az yb célfüggvény értéke 1, így a duális program minimuma is 1. Ezért $\max\{cx : Ax \leq b\} = 1$ is igaz.

A 3. feladat megoldása. A mátrix első 4 oszlopa az $U_{4,2}$ uniform matroidot koordinátázza, hiszen nincs köztük párhuzamos, de – síkbeli vektorokról lévén szó - közülük bármelyik három összefüggő. Mivel $U_{4,2}$ nem grafikus, ezért a megadott mátrix semmilyen p értékre nem koordinátázhat grafikus matroidot (hiszen egy elem elhagyásával a matroid grafikussága nem romolhatna el).

A 4. feladat megoldása. Jelölje a három matroidot sorban M_1, M_2 és M_3. Ekkor az $M_1 \vee M_2$ matroid függetlenjeit úgy kapjuk, hogy az M_2 függetlenjeihez (vagyis körmentes részhalmazaihoz) hozzávehetünk az a, b és c elemek közül egyet. Így a legföljebb két elemű halmazok mind függetlenek lesznek és a három eleműek közül is csak $\{a, b, c\}$ lesz összefüggő. Ezért $M_1 \vee M_2$ annak a gráfnak a körmatroidja, amelyben az a, b és c élek háromszöget alkotnak és d „lelóg” erről a háromszögről (vagy akár külön komponenst alkot).

Az $M_1 \vee M_3$ matroidnál az M_3 függetlenjeihez szabad az a, b és c elemek közül egyet hozzávenni. Így itt is független lesz minden legföljebb két elemű halmaz és a három eleműek is a $\{b, c, d\}$ kivételével. Ezért $M_1 \vee M_2$ annak a gráfnak a körmatroidja, amelyben a b, c és d élek alkotnak háromszöget és a „lóg le” a háromszögről.

Végül az $M_2 \vee M_3$ matroid esetében $\{c, d\}$ független M_2-ben és $\{a, b\}$ független M_3-ban, így az összegmatroidban az egész alaphalmaz is független lesz, vagyis $M_2 \vee M_3$ az $U_{4,4}$ szabad matroid. Ez nyilván grafikus: bármely 4 élű fa körmatroidja ez.

Az 5. feladat megoldása. Anélkül, hogy az az általánosság rovására menne, feltehetjük, hogy a középpont és a nyolcszög csúcsainak távolsága 1. Mivel a bemenet metrikus (hiszen a gráf teljes és a síkon vett távolságra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség), az algoritmus a terminálok által feszített részgráf egy minimális feszítőfáját adja. Ezt Kruskal-algoritmussal (vagy bármilyen más, tudottan polinomiális idejű minimális költségű feszítőfát kereső algoritmussal) kell meghatározni. A kérdéses gráfnak hat éle van, ebből négynek a költsége $\sqrt{2}$, a másik kettőé 2. A Kruskal-algoritmus az első négy élből talál meg tetszőleges hármat, az összköltség tehát $3\sqrt{2}$. Ez nem lesz optimális, mert a középpontot a négy terminállal összekötő élek alkotta Steiner-fa költsége $4 < 3\sqrt{2}$.

A 6. feladat megoldása. Legyen két gépünk, a megmunkálási idők pedig legyenek (mondjuk) 3,3,2,2,2. A nem növekvő sorrendű listás ütemezés először mindkét gépre 3 költségű, ennek végeztével mindkét gépre 2 költségű munkát tesz, végül az egyik gép elvégzi a hátralévő 2 költségű munkát, az összidő így 7 egység, holott ha a két 3-as munkát az egyik, a három 2-es munkát a másik gép végezné, akkor 6 időegység alatt végezhetnénk.