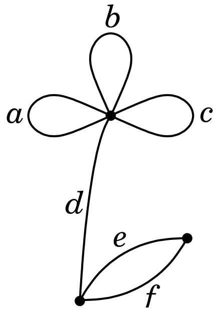
Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2007. november 28.

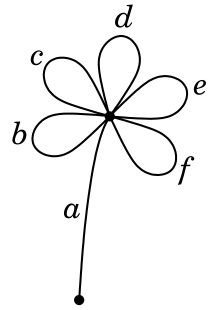
1. A Fourier-Motzkin elimináció segítségével döntsük el, hogy a p paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszernek.

$$\begin{aligned}
&x - 2y - z \leq p \\
&2x - 3y - 2z + 28 \geq 0 \\
&x + 2y + z \leq 21 \\
&x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0
\end{aligned}$$

2. Az A mátrixra teljesül, hogy minden, az A soraiból készített lineáris kombinációként előálló sorvektor tartalmaz 0-nál nem nagyobb elemet. Bizonyítsuk be, hogy az A oszlopaiból a nullvektor kifejezhető nemtriviális módon (vagyis nem csupa nulla együtthatót használva) nemnegatív együtthatós lineáris kombinációval.

3. Grafikus-e az alábbi két gráf által meghatározott matroid összege?





4. Válasszuk meg a p és q paramétereket úgy, hogy az alábbi mátrix által meghatározott matroid
a) grafikus legyen;
b) ne legyen grafikus.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & p & 2 & 0 \\ 5 & q & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Tekintsük az {`a,b,c,d,e,h,i,k,l,m,n,o,p,r,s,t`} betűhalmazt, és az elemeiből képzett alábbi szavakat, mint részhalmazokat (a szavak utáni zárójelben lévő szám jelenti az adott halmaz költségét):

```
cod (3),   perch (3),  carp (4), pike (4),  dab (5),
tench (5), salmon (5), hake (5), bream (6), sprat (6).
```

Hajtsuk végre ezen adatokkal az alaphalmaz részhalmazokkal történő lefedésére szolgáló, előadáson tanult közelítő algoritmust.

6. Igaz-e, hogy ha a precedenciagráf minden pontjának kifoka legfeljebb 1, akkor a $P|prec, p_i = 1|C_{\max}$ ütemezési feladat polinom időben megoldható?

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása. Az egyenlőtlenségrendszer mátrixos alakja $Ax \leq b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} p \\ 28 \\ 21 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az eliminációt (a Rendszeroptimalizálás könyv 17. oldalán írtak szerint végezve) végezve a következőket kapjuk:

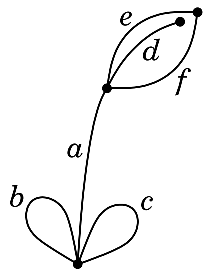
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 21 \\ 1 & -2 & -1 & p \\ -1 & \frac{3}{2} & 1 & 14 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{7}{2} & 2 & 35 \\ 0 & 2 & 1 & 21 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & p+14 \\ 0 & -2 & -1 & p \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{7} & 10 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{21}{2} \\ -1 & 0 & 2p+28 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{p}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{4}{7} & 2p+38 \\ 0 & \frac{1}{14} & \frac{p+20}{2} \\ 0 & \frac{4}{7} & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{4p+77}{2} \\ 0 & 0 & \frac{p+21}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{21}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 1 & \frac{7}{2}(p+19) \\ 1 & 7(p+20) \\ 1 & \frac{35}{2} \\ 1 & 4p+77 \\ 1 & 21 \\ -1 & 0 \\ 0 & p+21 \end{array}\right)$$

A kapott alak utolsó sora miatt a rendszernek csak $p + 21 \geq 0$ esetén lehet megoldása, ebben az esetben viszont ez a sor elhagyható. Az utolsó előtti sor ekkor azt jelenti, hogy $z \geq 0$. Az első 5 sor viszont z-re vonatkozó felső korlátokat jelent, így a rendszer megoldhatósága azon múlik, hogy ezek a felső korlátok mind nemnegatívak legyenek. Ez a harmadik és ötödik sorra fennáll, a többi sorból pedig a $p \geq -19$, $p \geq -20$, illetve a $p \geq -19.25$ korlátokat kapjuk. Ezek összevetéséből a rendszer akkor és csak akkor megoldható, ha $p \geq -19$.

A 2. feladat megoldása. Azt kell bizonyítani, hogy létezik olyan x oszlopvektor, amelyre $Ax = 0$, $x \geq 0$, $x \neq 0$. Erre az alakra a Farkas-lemma közvetlenül nem alkalmazható az $x \neq 0$ feltétel miatt. Ezen azonban könnyen segíthetünk, ha észrevesszük, hogy a vizsgált rendszer bármely x megoldása esetén $\lambda \cdot x$ is megoldás lesz minden $\lambda > 0$-ra. Ezért az x komponenseinek összegét alkalmas λ választásával tetszőleges pozitív értékre beállíthatjuk. Így a bizonyítandó állítás ekvivalens módon úgy is megfogalmazható, hogy az $Ax = 0$, $\mathbf{1} \cdot x = 1$, $x \geq 0$ rendszer megoldható (ahol $\mathbf{1}$ a csupa 1 sorvektort jelöli). Erre az alakra pedig már alkalmazható a Farkas lemma (Rendszeroptimalizálás könyvbeli, 1.4 Tételnek megfelelő alakja). Azt kapjuk, hogy ha az $\begin{pmatrix} A \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x \geq 0$ rendszer indirekt nem volna megoldható, akkor létezik olyan $(y|\mu)$ sorvektor, amelyre $(y|\mu) \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \geq 0$ és $(y|\mu) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} < 0$. (Itt a Farkas-lemma által garantált sorvektor utolsó, $\mathbf{1} \cdot x = 1$ sornak megfelelő komponensét különválasztottuk és μ-vel jelöltük). Átrendezve ez azt jelenti, hogy $yA + (\mu, \mu, \ldots, \mu) \geq 0$, $\mu < 0$. Vagyis az yA sorvektor nagyobb-egyenlő a csupa pozitív elemeket tartalmazó $(-\mu, -\mu, \ldots, -\mu)$ sorvektornál. Ez ellentmond a feladat feltételének (hiszen yA az A soraiból készített lineáris kombináció).

A 3. feladat megoldása. Jelöljük a bal oldali gráf által meghatározott matroidot M_1-gyel, a jobb oldali által meghatározottat M_2-vel. M_2-ben az üres halmazon kívül csak $\{a\}$ független (hiszen a többi elem hurok). Ezért a két matroid összegének függetlenjeit úgy kapjuk, hogy M_1 függetlenjeit kiegészít(het)jük a-val. M_1 bázisai (maximális körmentes élhalmazai) jól láthatóan a $\{d, e\}$ és $\{d, f\}$ halmazok. Így $M_1 \vee M_2$ bázisai az $\{a, d, e\}$, $\{a, d, f\}$ halmazok lesznek (és így ezek részhalmazai lesznek $M_1 \vee M_2$ függetlenjei). Könnyen látható, hogy ez a matroid is grafikus, az alábbi gráf reprezentálja.



A 4. feladat megoldása. Jelölje a mátrix 4 oszlopát sorban a, b, c és d. A mátrix által reprezentált M matroidban a, c és d háromszöget (három elemű kört) határoznak meg, hiszen közülük semelyik kettő nem párhuzamos, de a három oszlop együtt lineárisan összefüggő ($c = a + 2d$). A b oszlop akkor lesz párhuzamos a-val, c-vel, illetve d-vel, ha $p = q = 0$, $p = \frac{4}{3}, q = \frac{10}{3}$, illetve $p = 4, q = 10$. Ezekben az esetekben M grafikus, hiszen reprezentálja az a gráf, amelyet egy háromszög egyik élének megduplázásával kapunk. Egyéb esetekben azt kell ellenőriznünk, hogy az $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{b, c, d\}$ halmazok függetlenek-e; ezt legegyszerűbb a 3 darab 3×3-as determináns kiszámításával megtenni. Mindhárom esetben azt kapjuk, hogy a halmaz akkor és csak akkor független (azaz a determináns akkor és csak akkor nem nulla), ha $5p \neq 2q$. Ez azt jelenti, hogy $5p \neq 2q$ esetén M ismét grafikus: ha az a, c és d élek által meghatározott háromszögről „lelógatjuk" a b élet, a kapott gráf reprezentálja M-et. A fennmaradó esetekben viszont (amikor tehát $5p = 2q$, de $p \neq 0, \frac{4}{3}, 4$) azt kapjuk, hogy M-ben minden 3 elemű halmaz összefüggő, de minden 2 elemű még független. Vagyis ilyenkor $M \cong U_{4,2}$, vagyis M nem grafikus. (Mindezt persze egy teljes értékű megoldáshoz nem kell végiggondolni, elég egy-egy olyan esetet mutatni, amikor M grafikus, illetve amikor nem.)

Az 5. feladat megoldása. Az algoritmus mindig azt a részhalmazt választja ki amelyre a lehető legkisebb a halmaz költségének és az újonnan lefedett elemek számának hányadosa.

Az első lépésben a `perch` részhalmazt kell választanunk, mert ennek a legkisebb az egy elemre eső aktuális költsége ($\frac{3}{5}$). Ezt követően a `salmon` részhalmaz jön, $\frac{5}{6}$ aktuális költséggel. A következő halmaz a `pike` kell legyen, ez újabb 2 elemet fed le, 4 költséggel, majd a `dab` halmaz jön, ennek költsége $\frac{5}{2}$. Végül a hátramaradt `t` betűt kell lefednünk, ezt a legolcsóbban a `tench` szóval tehetjük meg. A kapott fedés tehát: $\{\texttt{perch}, \texttt{salmon}, \texttt{pike}, \texttt{dab}, \texttt{tench}\}$, költsége 22.

A 6. feladat megoldása. Megmutatjuk, hogy a feladatbeli gráfok komponensei be-fenyők. Először azt látjuk be, hogy a gráf irányítatlan értelemben erdő. Irányított kört természetesen nem tartalmazhat, ha pedig irányítatlan kört tartalmazna, akkor annak lenne olyan csúcsa, amelynek kifoka a körben kettő, ami ellentmond a feltételnek (ha a kör k csúcsból áll, akkor a benne szereplő élek kifokainak összege a körben k, ha ezek közt nincs egynél nagyobb, akkor mindegyiknek épp egynek kell lennie, ekkor viszont irányított körről lenne szó).

Tekintsük a gráf egy tetszőleges komponensét. Mivel ez aciklikus, kell hogy legyen benne nyelő, legyen ez s. Megmutatjuk, hogy bármely x pontból az s-be vezető irányítatlan értelemben vett utak minden éle s felé van irányítva, igazolva ezzel, hogy a komponens valóban be-fenyő. Az s-sel szomszédos élek s felé vannak irányítva, hiszen s nyelő. Ezen éleket elhagyva s szomszédai válnak nyelővé, ellenkező esetben a kifokuk legalább kettő lenne. Az így kapott gráfban tehát minden él, ami s szomszédai közül valamelyikhez csatlakozik, a szomszédok felé mutat. Az eljárást x eléréséig folytatva (ez be fog következni, hiszen s és x között létezik út) x-ből s-be vezető irányított utat kapunk.

Beláttuk tehát, hogy a komponensek be-fenyők. Most minden komponens nyelőjéből egy közös új pontba élet húzva be-fenyőt kapunk, amire Hu algoritmusát alkalmazva polinom időben optimális ütemezést kapunk. Ebből az újonnan hozzávett pontot törölve nyilván optimális ütemezést kapunk az eredeti feladatra.