Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok és megoldások
2006. december 9.

1. Döntsük el, hogy az $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ választással
a) bázismegoldását
b) erős bázismegoldását
adtuk-e meg az alábbi egyenlőtlenségrendszernek:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_3 &\leq 2 \\ x_2 + x_4 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 4 \end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenlőtlenségrendszer mátrixos alakja $Ax \leq b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy A utolsó sora az előző kettő összege, az első három sor viszont lineárisan független, így $r(A) = 3$. A megadott $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ megoldás az A második, harmadik és negyedik sorának megfelelő egyenlőtlenségeket teljesíti egyenlőséggel, az elsőt nem. Ezért az egyenlőséggel teljesített sorok alkotta mátrix rangja csak 2 (mert az utolsó sor az előző kettő összege), így a megadott megoldás nem bázismegoldás (és így persze nem is erős bázismegoldás).

2. Egy G irányított gráfban irányított körök egy $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ halmazát nevezzük *irányított körfedésnek*, ha a C_i körök páronként csúcsdiszjunktak és a gráf minden csúcsa rajta van valamelyik körön. Legyen adott egy G irányított gráf, amelyről tudjuk, hogy van benne irányított körfedés. Legyen adott továbbá egy $w : E(G) \to \mathbb{R}$ élsúlyozás. A feladatunk egy maximális összsúlyú irányított körfedés megtalálása. (Egy körfedés súlya a benne szereplő körök élei súlyának összege.) Bizonyítsuk be, hogy létezik polinomiális idejű algoritmus ennek a feladatnak a megoldására!

Első megoldás. Megmutatjuk, hogy ez a feladat megfogalmazható lineáris programozási feladatként. Mivel ismert, hogy ezek megoldására van polinom idejű algoritmus, ezzel a feladatot megoldjuk.

Első közelítésben egészértékű programozási problémaként fogalmazzuk meg a feladatot. Minden e élhez rendeljünk egy $x(e)$ változót, amelyre írjuk fel az $0 \leq x(e) \leq 1$ egyenlőtlenségeket és deklaráljuk $x(e)$-t egészértékűnek. Ezzel nyilván azt garantáljuk, hogy minden $x(e)$ 0, vagy 1 értékű. Célunk, hogy az 1 értékű változóknak megfelelő élek irányított körfedést alkossanak.

Az irányított körfedés más megfogalmazásban az élek egy olyan E_0 részhalmaza, amelyre teljesül, hogy minden csúcsba pontosan egy E_0-beli él lép be és minden csúcsból egy E_0-beli él lép ki. Ezért elég minden v csúcsra felírni két egyenletet: ha v-be az $e_1, \ldots, e_r$ élek lépnek be és v-ből az $f_1, \ldots, f_d$ élek lépnek ki, akkor az $\sum_{i=1}^{r} x(e_i) = 1$ és $\sum_{i=1}^{d} x(f_i) = 1$ egyenletek éppen azt fejezik ki, hogy v-be egy kiválasztott él lép be és v-ből egy kiválasztott él lép ki. (Avagy, a hálózati folyamok kapcsán a Rendszeroptimalizálás könyv 36. oldalán bevezetett jelöléseket alkalmazva: $\varrho_x(v) = 1$ és $\delta_x(v) = 1$.) Így a kapott egyenlőtlenségrendszer egész megoldásain a $\sum w(e)x(e)$ lineáris függvényt maximalizálva valóban megkaptuk a kitűzött feladat egészértékű programozási megfogalmazását.

Célunk azt megmutatni, hogy a fenti rendszert leíró mátrix totálisan unimoduláris, mert ebből (tekintve, hogy az egyenlőtlenségek jobb oldalán álló számok egészek – mindenhol ± 1 vagy 0) valóban következik (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.12. tétel), hogy a fenti IP feladat helyett megoldhatjuk a megfelelő LP feladatot is, a két optimum azonos.

Ehhez a rendszert leíró mátrixból elég csak a $\sum_{i=1}^{r} x(e_i) \leq 1$ és $\sum_{i=1}^{d} x(f_i) \leq 1$ (azaz: $\varrho_x(v) \leq 1$ és $\delta_x(v) \leq 1$) soroknak megfelelő részt – jelöljük ezt M-mel — vizsgálni, mert ebből a teljes rendszert leíró mátrixot úgy kapjuk, hogy először M sorainak ellentettjét vesszük hozzá M-hez (hogy a fenti egyenlőtlenségekből egyenletet csináljunk), majd az egységmátrixot és annak ellentettjét vesszük még hozzá (a $0 \leq x(e) \leq 1$ feltételek miatt). Ezek a kiegészítések azonban a tanult triviális lemma szerint (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.13. lemma) megőrzik a mátrix totális unimodularitását.

M sorai kétfelé választhatók: az $\sum_{i=1}^{r} x(e_i) \leq 1$ (azaz $\varrho_x(v) \leq 1$), illetve az $\sum_{i=1}^{d} x(f_i) \leq 1$ (azaz $\delta_x(v) \leq 1$) egyenlőtlenségeknek megfelelő sorokra; jelöljük az első részt M_1-gyel, a másodikat M_2-vel. Mivel minden irányított él egyetlen csúcsból lép ki és egy csúcsba lép be, ezért M minden oszlopában pontosan két darab 1-es van, az egyik M_1-ben, a másik M_2-ben; minden más elem 0. Ezért M egy páros gráf illeszkedési mátrixa: a páros gráf mindkét osztálya az irányított gráf csúcshalmazának felel meg, és minden irányított élből a páros gráf egy éle keletkezik. Ezért M valóban totálisan unimoduláris (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.14. tétel), amivel a feladatot megoldottuk.

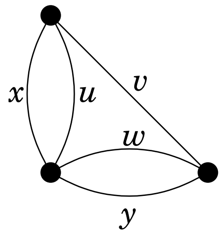
Második megoldás (vázlat). Készítsünk G-ből egy páros gráfot: vegyük fel a $V(G)$ csúcshalmazt két példányban – jelöljük ezeket V_1-gyel és V_2-vel – és G minden $u \to v$ irányított éle esetén a készülő páros gráfban u-nak a V_1-beli megfelelőjét kössük össze v-nek a V_2-beli megfelelőjével. (Ugyanez a páros gráf került elő az első megoldás végén is.) Az így kapott élhez rendeljük hozzá az $u \to v$ él G-beli súlyát. Nem nehéz végiggondolni, hogy a G-beli irányított körfedések a kapott páros gráf teljes párosításainak felelnek meg. Ezért a feladatunk maximális összsúlyú teljes párosítás keresése páros gráfban, ami megtehető az Egerváry-algoritmussal.

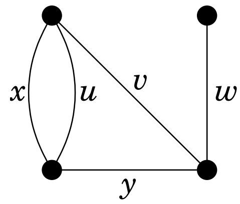
3. Lehet-e olyan értéket adni az a paraméternek, hogy az alábbi mátrix oszlopai által a valós test felett koordinátázott M_1 matroid grafikus legyen?

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & u & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Megoldás. Látható, hogy a mátrix u oszlopa (-2)-szerese az x oszlopnak, így a készülő grafikus reprezentációban ezeknek párhuzamos élek felelnek meg. Az x, y és v oszlopok között nincs olyan pár, amelyek párhuzamosak volnának, de jól látható, hogy $x + y = v$; ezért ennek a három oszlopnak egy három élű kör felel meg. Az első négy oszlopnak megfelelő rész tehát egy olyan háromszöggel reprezentálható, amelynek az egyik élét megdupláztuk. Így a kérdés az, hogy a értéke megválasztható-e úgy, hogy a w-nek megfelelő él hozzávehető legyen ehhez a gráfhoz.

A válasz igen. Legegyszerűbb talán az $a = 0$ választás. Ilyenkor ugyanis a w oszlop (-2)-szerese az y oszlopnak, így a gráfban a megfelelő élek párhuzamosak; ezt mutatja az alábbi, bal oldali ábra. Némi számolással az is végiggondolható, hogy $a \neq 0$ esetén x, y, v, w közül az x, y, v hármast leszámítva bármely három oszlop lineárisan független. Ezért a matroid ilyenkor is grafikus, a megfelelő gráfot az alábbi, jobb oldali ábra mutatja. Vagyis a matroid valójában az a paraméter minden értékére grafikus (amit persze a feladat teljes értékű megoldásához nem szükséges végiggondolni).





4. Az M_2 matroidot az alábbi mátrix koordinátázza (a valós test fölött). Mutassuk meg, hogy az $M_1 \vee M_2$ matroid (ahol M_1 az előző feladatbeli M_1-gyel azonos) az a paraméter bármely értéke esetén grafikus!

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & u & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Megoldás. Az M_2 matroid jól láthatóan az $U_{5,2}$ uniform matroid (azzal izomorf), hiszen a mátrix bármely két oszlopa lineárisan független, de bármely három – tekintve, hogy síkbeli vektorokról van szó – lineárisan összefüggő. Ezért az $M_1 \vee M_2$ matroid függetlenjei úgy kaphatók, hogy az M_1 matroid függetlenjeit kiegészítjük két tetszőleges elemmel.

Az előző feladat megoldásából kiderül, hogy az M_1 rangja (bázisának mérete) a értékétől függően 2 vagy 3. (Ehhez nincs szükség a fenti megoldásban az $a \neq 0$ eset részletes végiggondolására.)

Ha az M_1 rangja 3, akkor egy bázisát a hiányzó két elemmel kiegészítve az $\{x, y, u, v, w\}$ halmazt kapjuk; ez tehát független $M_1 \vee M_2$-ben (és persze minden részhalmaza is), így ilyenkor $M_1 \vee M_2$ az $U_{5,5}$ szabad matroid. Ez valóban grafikus, bármely 5 élű, körmentes gráf reprezentálja.

Ha az M_1 rangja csak 2, akkor $M_1 \vee M_2$-ben a független halmazok legföljebb 4 eleműek. Könnyű azonban végiggondolni, hogy minden 4 elemű halmaz független: M_1-ben ugyanis a kételeműek közül csak az $\{x, u\}$ és esetleg az $\{y, w\}$ összefüggő. Nyilván tetszőleges 4 elemű részhalmazt felbonthatunk 2 darab 2 eleműre úgy, hogy ezt a két párt „szétválasszuk”, amivel a részhalmazt egy M_1 és egy M_2-beli független uniójára bontottuk. Ezért ilyenkor $M_1 \vee M_2$ az $U_{5,4}$ uniform matroid, ami szintén grafikus: egy 5 élű kör reprezentálja.

(Mindezt az előző feladat megoldásában írtakkal összevetve az is kiderül, hogy az $M_1 \vee M_2$ összeg $a \neq 0$-ra az $U_{5,5}$-tel, $a = 0$-ra az $U_{5,4}$-gyel izomorf; ennek végiggondolására sincs szükség a feladat teljes értékű megoldásához.)

5. Igaz-e, hogy mindig létezik a munkáknak olyan sorbarendezése, amely sorrendben a Graham-féle listás ütemező algoritmust végrehajtva optimális megoldást kapunk a $P||C_{\max}$ feladatra?

Megoldás. Az állítás igaz. Tekintsünk egy olyan S optimális ütemezést, melyben egyetlen gép sem áll, amíg van el nem kezdett munka. Megmutatjuk, hogy ilyen létezik. Induljunk ki egy tetszőleges optimális ütemezésből. Egy gépen a két munka közti esetleges állásidőket megszüntetve a teljes átfutási idő nem nőhet. Ha egy gép utolsó munkája után még lenne elkezdhető feladat, vegyük a legkorábbi ilyen utolsó munkát, az ennek befejezésekor elkezdhető feladatot valamely más gép később kezdené el; ekkor a másik gép összes hátralevő munkáját erre a gépre átcsoportosítva a teljes átfutási idő nem nőne. E műveletet szükség esetén többször is elvégezve felesleges állásidő nélküli ütemezést kapunk, melynek átfutási ideje nem nagyobb az eredetinél, így maga is optimális. Az eljárás biztosan végetér, hiszen a felesleges állásidők kezdetének minimuma szigorúan monoton nő egy lépés során.

Vegyük most a munkáknak egy olyan sorrendjét, melyet az S szerinti kezdési idők határoznak meg. Nyilvánvaló, hogy a listás ütemezés ebben a sorrendben optimális lesz, hiszen sem S-ben, sem a kapott listás ütemezésben nem áll egyetlen gép sem, amíg van el nem kezdett munka, így a két ütemezés munkáinak kezdési és befejezési idejei is azonosak lesznek.

6. Mutassuk meg, hogy a ládapakolás feladatra adott First Fit algoritmus approximációs faktora nem jobb, mint $\frac{5}{3}$.

Megoldás. Legyenek a ládák 100 egység térfogatúak és tekintsük a

$$15, 15, 15, 15, 15, 15, 34, 34, 34, 34, 34, 34, 51, 51, 51, 51, 51, 51$$

bemenetet. A First Fit ezt láthatóan 1+3+6=10 ládában helyezi el, míg az optimum 6 láda lenne.