R E N D S Z E R O P T I M A L I Z Á L Á S

Ötödik szerdai előadás, 2023. április 5.

1. Mutassuk meg a Farkas-lemma segítségével, hogy az alábbi lineáris egyenletrendszernek nincs olyan megoldása, amelyben mind az öt változó értéke nemnegatív. (Vagyis adjunk meg egy olyan vektort, amely a Farkas-lemma értelmében bizonyítja a rendszer nemnegatív számokkal való megoldhatatlanságát.) (ZH, 2014. április 30.)

$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_3 - 21x_4 &= 6 \\ 7x_2 + x_3 - 14x_5 &= 1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 9x_4 + 10x_5 &= 2 \end{aligned}$$

2. Van-e az alábbi lineáris egyenletrendszernek olyan megoldása, amiben az x_1, x_2 és x_3 változók értéke nemnegatív? (Az x_4 változó értéke tehát tetszőleges valós szám lehet, csak az első három változó nemnegativitása van kikötve.) (ZH, 2022. május 4.)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 &= 1 \end{aligned}$$

3. Legyen A egy $m \times n$-es mátrix, az oszlopait jelölje $\underline{c}_1$, $\underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_n$, a sorait pedig $\underline{r}_1$, $\underline{r}_2, \ldots$, $\underline{r}_m$. Tegyük fel, hogy az $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0, \ldots$, $\alpha_n \geq 0$ nemnegatív együtthatók bármilyen választása esetén az $\alpha_1\underline{c}_1 + \alpha_2\underline{c}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{c}_n$ vektor tartalmaz 1-től különböző elemet. Mutassuk meg, hogy ekkor léteznek olyan (valós) β_1, $\beta_2, \ldots$, β_m együtthatók, hogy a $\beta_1\underline{r}_1 + \beta_2\underline{r}_2 + \ldots + \beta_m\underline{r}_m$ sorvektor minden eleme nemnegatív és $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m < 0$.

---

4. A p valós paraméter mely értékeire van az alábbi lineáris egyenletrendszernek olyan megoldása, amelyben mind az öt változó értéke nemnegatív? A p-nek azokra az értékeire, amelyekre ilyen megoldás nem létezik, adjunk meg egy olyan vektort, amely ezt a tényt a Farkas-lemma értelmében bizonyítja.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 12x_4 - 10x_5 &= 7 \\ 11x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 21x_4 - 22x_5 &= 10 \\ x_1 + x_3 - 2x_5 &= p \end{aligned}$$

5. Legyen A $m \times n$-es mátrix, $b \in \mathbb{R}^m$ oszlopvektor. Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszerek közül pontosan az egyik megoldható:

(1) $Ax \leq b$, $x \geq 0$

(2) $yA \geq 0$, $y \geq 0$, $yb < 0$ (ZH, 2009. december 15.)

6. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráf minden csúcsához hozzá van rendelve egy $f(v)$ valós súly. Minden v csúcs esetén jelölje $N_f(v)$ a v csúcs összes u szomszédján lévő $f(u)$ súlyok összegét; képletben:

$$N_f(v) = \sum_{\{v,u\} \in E(G)} f(u).$$

Alíz és Bob gráfőrültek. Valahányszor Alíz meglát egy gráfot, ellenállhatatlan késztetést érez, hogy annak minden v csúcsához úgy rendeljen egy $f(v)$ súlyt, hogy $f(v) \geq 0$ és $N_f(v) = 1$ teljesüljön minden v csúcsra. Ha viszont Bob kerül gráfközelbe, úgy akar annak minden v csúcsához egy $f(v)$ súlyt rendelni, hogy $N_f(v) \geq 0$ teljesüljön minden v csúcsra, miközben $\sum_{v \in V(G)} f(v) < 0$. Mutassuk meg, hogy minden G egyszerű gráf esetén Alíz és Bob közül pontosan az egyik járhat sikerrel.