

1. Formalizáljuk az alábbi lineáris programozási feladatokat az általános $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakban. (Azaz: adjuk meg az A mátrixot, a b oszlopvektort és a c sorvektort úgy, hogy a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alak megfeleljen az alábbi feladatoknak.)

$\max\{x_1 + 2x_2 + 3x_3\}$ <p>ha</p> a) $\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &\leq 10 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 11 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$	$\min\{x_1 + 2x_2 + 3x_3\}$ <p>ha</p> b) $\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &\leq 10 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 11 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$
---	---

2. Használjuk a Farkas-lemmát annak bizonyítására, hogy az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszer nem megoldható.

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_4 &\geq -3 \\ 3x_1 + x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 - 3x_4 &\leq 3 \end{aligned}$$

3. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak. (u és v oszlopvektorokat, a és b sorvektorokat jelöl, a 0 a nullvektort (is) jelöli, mindezeknek a dimenziója azonos.)

- a) Ha $u \leq v$ és $u \neq v$, akkor $u < v$.
- b) Ha $u + v \geq u$, akkor $v \geq 0$.
- c) Ha $u \geq 0$ és $a \cdot u > 0$, akkor $a \geq 0$.
- d) Ha $0 \leq a \leq b$ és $0 \leq u \leq v$, akkor $a \cdot u \leq b \cdot v$.

4. Tegyük fel, hogy az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható és cx felülről korlátos a megoldáshalmazán. Legyen $M = \max\{cx : Ax \leq b\}$. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások.

- a) Ha $b \geq 0$, akkor $M \geq 0$.
- b) Ha $b > 0$, akkor $M > 0$.

5. Írjuk fel az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszert $Ax \leq b$ alakban, majd bizonyítsuk be a Farkas-lemma felhasználásával, hogy a rendszer nem megoldható. (Vagyis adjunk meg egy vektort és mutassuk meg róla, hogy ez a Farkas-lemma értelmében bizonyítja a rendszer megoldhatatlanságát.) (ZH, 2018. május 22.)

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_4 &\leq 1 \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 &\geq -2 \\ 3x_2 - x_3 - 2x_4 &\geq 0 \\ 2x_3 + 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

6. Tegyük fel, hogy az A mátrix minden eleme nemnegatív, továbbá A minden sora tartalmaz legalább egy pozitív elemet. Bizonyítsuk be, hogy az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható.

7. Tegyük fel, hogy az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható; továbbá bárhogy választjuk ki a b vektor egyetlen elemét és módosítjuk azt egy tetszőleges új értékre, az így kapott b' vektorra is az $Ax \leq b'$ rendszer mindig megoldható. Mutassuk meg, hogy ekkor minden (megfelelő dimenziós) d vektorra az $Ax \leq d$ rendszer megoldható.

8*. Tegyük fel, hogy az $A_1x \leq b_1$ és $A_2x \leq b_2$ (n változós) lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldhatók, de nincsen közös megoldásuk. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $cx \leq \delta$ lineáris egyenlőtlenség (nem feltétlen olyan, ami akár az $A_1x \leq b_1$, akár az $A_2x \leq b_2$ rendszer része volna), amelyet az $A_1x \leq b_1$ rendszer minden megoldása kielégít és az $A_2x \leq b_2$ minden megoldása megsért.