Rendszeroptimalizálás

Pótzárthelyi feladatok — 2023. június 1.

1. A $G(F, L; E)$ teljes páros gráf két pontosztálya legyen $F = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $L = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen a balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem (minden $1 \leq i, j \leq 5$ esetén). A maximális összsúlyú teljes párosítást kereső Egerváry-algoritmust valaki már elkezdte futtatni G-re és ott tart, hogy az aktuális M párosítás az $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$ és $\{a_3, b_3\}$ élekből áll, az aktuális c címkézés pedig a jobb oldali táblázatban látható. Fejezzük be az algoritmus futtatását és adjuk meg az eredményként kapott maximális összsúlyú teljes párosítást.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 5 & 10 & 6 & 10 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c(v)$	:	3	6	2	8	1	0	2	2	5	5

(A feladat tehát nem csak egy maximális összsúlyú teljes párosítás meghatározása, hanem az algoritmus futásának a dokumentálása a közben keletkező minden adat megadásával.)

2. Írjuk fel a jobbra látható lineáris egyenlőtlenségrendszert $Ax \leq b$ alakban, majd alkalmazzuk a Farkas-lemmát annak a bizonyítására, hogy a rendszer nem megoldható. (Vagyis adjunk meg egy vektort és mutassuk meg róla, hogy ez a Farkas-lemma értelmében bizonyítja az $Ax \leq b$ rendszer megoldhatatlanságát.)

$$\begin{aligned} &7x_1 - x_2 \leq 3 \\ &3x_1 - x_3 + 2x_4 \geq 1 \\ &x_2 - 2x_3 + 7x_4 \leq -2 \\ &x_2 - 3x_3 = 1 \end{aligned}$$

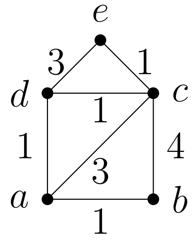
3. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Igaz-e, hogy az $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 1$ választással a (primál) feladat egy optimális megoldását adtuk meg?

$$\begin{aligned} &\max\{5x_1 + 9x_2 + 9x_3 - 6x_4\} \\ &\text{ha} \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 1 \\ &7x_2 + 9x_3 \geq 0 \\ &x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 \leq 1 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

4. a) Futtassuk le és dokumentáljuk a Steiner-fa probléma közelítésére tanult approximációs algoritmust a jobbra látható bemeneten $T = \{a, b, c, e\}$ mellett.

b) Döntsük el, hogy a kapott kimenet optimális Steiner-fa-e.



5. Legyenek a, b, c pozitív egészek, melyekről annyit tudunk, hogy $c \leq \log_2 ab$. Az abc szorzat előállítására a következő algoritmust szeretnénk használni: összeszorozzuk a-t és b-t a szokásos írásbeli szorzással, majd a kapott eredményt összeadjuk önmagával c példányban. Döntsük el, hogy ez az algoritmus polinomiális-e.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér. Az aláíráshoz szükséges minimális pontszám 24. Elégséges megajánlott jegyhez legalább 33, közepeshez 42, jóhoz 51 pontot kell elérni. Kérjük, hogy **minden feladat külön lapra** kerüljön. A lapok tetején jól láthatóan legyen feltüntetve a név, a Neptun-kód és a feladat sorszáma.

Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2023. június 1.

Általános alapelvek.

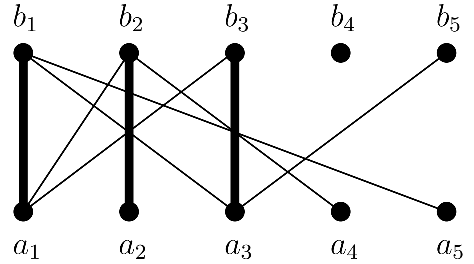
A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli.

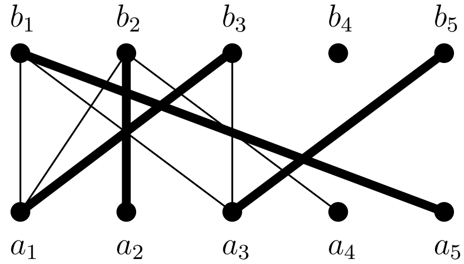
Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Az 1. feladat megoldása. A megadott címkézéshez tartozó „szoros élek” meghatározásával kezdjük, vagyis azokat az $e = \{a, b\}$ éleket keressük, amelyekre $w(e) = c(a) + c(b)$ (ahol $w(e)$ az e él súlyát jelöli). Ezek a következők: $\{a_1, b_1\}$, $\{a_1, b_2\}$, $\{a_1, b_3\}$, $\{a_2, b_2\}$, $\{a_3, b_1\}$, $\{a_3, b_3\}$, $\{a_3, b_5\}$, $\{a_4, b_2\}$ és $\{a_5, b_1\}$; lásd az alábbi, bal oldali ábrát. (1 pont)
(Látszik, hogy a megadott M párosítás élei – az ábrán vastag vonallal – is szorosak; ha ez nem így volna, az azt jelentené, hogy az algoritmus korábbi futása hibás volt.) (0 pont)



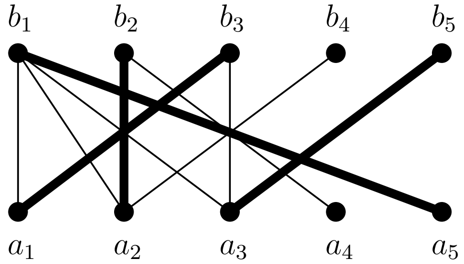


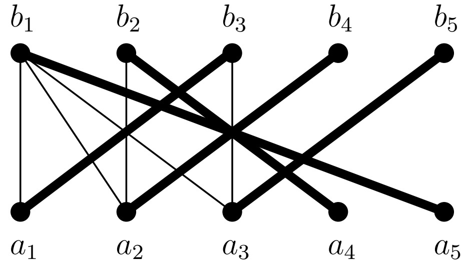
Most M-ből kiindulva a maximális párosítás keresésére szolgáló javító utas algoritmust futtatjuk a szoros élek alkotta részgráfban. A párosítatlan F-beli pontok: a_4 és a_5. Látható, hogy az a_5, b_1, a_1, b_3, a_3, b_5 sorrendben bejárva a csúcsokat javítóutat kapunk; ementén javítva a következő párosítást kapjuk: $\{a_1, b_3\}$, $\{a_2, b_2\}$, $\{a_3, b_5\}$, $\{a_5, b_1\}$ (lásd a fenti, jobb oldali ábrát). (2 pont)
A most kapott M' párosításra nézve már nincs javítóút a (jelenlegi) szoros részgráfban (például mert b_4-re nem illeszkedik szoros él). (1 pont)
Ezért áttérünk a következő c' címkézés meghatározására. A párosítatlan F-beli, illetve L-beli csúcsok halmaza $F_1 = \{a_4\}$ és $L_1 = \{b_4\}$. Az F_1-ből alternáló úton elérhető L-beliek halmaza $L_2 = \{b_2\}$, mert a_4-ből csak b_2-be vezet szoros él, ahonnan a_2-be lépve elakadunk. Az L_2-beliek M' szerinti párjainak halmaza tehát $F_2 = \{a_2\}$. Így a maradék F-beliek, illetve L-beliek halmaza $F_3 = \{a_1, a_3, a_5\}$, illetve $L_3 = \{b_1, b_3, b_5\}$. (2 pont)
Az algoritmus működési szabálya szerint az $F_1 \cup F_2 = \{a_2, a_4\}$ és az $L_1 \cup L_3 = \{b_1, b_3, b_4, b_5\}$ halmazok halmazok közti élek mindegyikére ki kell számítani a $c(a) + c(b) - w(e)$ „fölösleget”, majd ezek minimumát kell venni. A feladat adatait felhasználva az a_2-ből induló (és $L_1 \cup L_3$-ba menő) élek fölöslegei rendre 2, 3, 2 és 3, az a_4-ből induló élek fölöslegei pedig 3, 4, 3 és 4. Ezeknek a minimuma pedig $\delta = 2$. (1 pont)
Ezek után a következő c' címkézés meghatározásához $F_1 \cup F_2$ elemein δ-val csökkenteni, L_2 elemein pedig δ-val növelni kell a jelenlegi címkézést. Így c' a következő:

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c'(v)$	:	3	4	2	6	1	0	4	2	5	5

(2 pont)

Ezzel az algoritmus teljes ciklusát végrehajtottuk, ismét a (most már c'-höz tartozó) szoros élek meghatározásával folytatjuk. A fenti ábrákon látható szoros részgráfhoz képest három változás történik: $\{a_1, b_2\}$ megszűnik szorosnak lenni, (1 pont)
$\{a_2, b_1\}$ és $\{a_2, b_4\}$ pedig új szoros élek (lásd az alábbi, bal oldali ábrát). (Ezek a változások egyrészt c'-ből és az élsúlyokból közvetlenül is kiolvashatók, de a fentiekből is következik: $\{a_2, b_1\}$ volt az egyetlen F_3 és L_2 közötti él, a δ meghatározásakor pedig a minimum az $\{a_2, b_1\}$ és $\{a_2, b_4\}$ éleken vétetett föl.) (1 pont)





Az új szoros részgráfban könnyen találunk az M'-re nézve javító utat: a_4, b_2, a_2, b_4. Ementén javítva M'-t pedig már teljes párosítást kapunk: $\{a_1, b_3\}$, $\{a_2, b_4\}$, $\{a_3, b_5\}$, $\{a_4, b_2\}$ és $\{a_5, b_1\}$ (lásd a fenti, jobb oldali ábrát). Így ezzel (illetve a fenti c' címkézéssel) áll meg az algoritmus futása. (1 pont)
Ha egy megoldó az algoritmus futtatásakor felcseréli F és L szerepét (és így a címkék módosításakor az L-beliekét csökkenti és az F-beliekét növeli), de egyébként helyesen jár el, az természetesen maximális pontszámot ér. (Ebben az esetben kétszer is módosulnak a címkék a teljes párosítás eléréséig és a végül kapott címkézés is más lesz, de a kapott teljes párosítás ugyanaz.)

A 2. feladat megoldása. A rendszer mátrixos alakja $Ax \le b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Mivel a Farkas-lemma szerint az $Ax \le b$ és az $yA = 0$, $y \ge 0$ és $yb < 0$ rendszerek közül pontosan egy megoldható, ezért $Ax \le b$ megoldhatatlanságát egy olyan y sorvektor bizonyítja, amelyre $yA = 0$, $y \ge 0$ és $yb < 0$. (1 pont)
Legyen $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$. Ekkor a fentieket részletesen kiírva a következő feltételeket kapjuk:

$$\begin{array}{lr} (1) & 7y_1 - 3y_2 = 0 \\ (2) & -y_1 + y_3 + y_4 - y_5 = 0 \\ (3) & y_2 - 2y_3 - 3(y_4 - y_5) = 0 \\ (4) & -2y_2 + 7y_3 = 0 \\ (5) & y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0,\ y_5 \ge 0 \\ (6) & 3y_1 - y_2 - 2y_3 + y_4 - y_5 < 0 \end{array} \qquad \text{(2 pont)}$$

Legyen $y_1 = \alpha$ valamilyen $\alpha \ge 0$ értékre. Ekkor (1)-ből $y_2 = \frac{7}{3}\alpha$. (1 pont)
Ezt felhasználva (4)-ből $y_3 = \frac{2}{3}\alpha$. (1 pont)
Ezekből és (2)-ből $y_4 - y_5 = \frac{1}{3}\alpha$. (1 pont)
Ha viszont $y_1, \ldots, y_5$ értékeit úgy választjuk, hogy az eddig kapott feltételeknek (és $y_4, y_5 \ge 0$-nak) megfeleljenek, akkor ezekből már (3) automatikusan teljesül: $\frac{7}{3}\alpha - \frac{4}{3}\alpha - \alpha = 0$. (1 pont)
Sőt, $\alpha > 0$ esetén (6) is teljesül: $3\alpha - \frac{7}{3}\alpha - \frac{4}{3}\alpha + \frac{1}{3}\alpha = -\frac{1}{3}\alpha < 0$. (1 pont)
Így a rendszer megoldhatatlanságát bizonyítja a Farkas-lemma értelmében minden, a fenti feltételeknek megfelelő vektor, például $y = (3, 7, 2, 1, 0)$. (2 pont)
Ha egy megoldó (a mátrixos alak felírása után) egyszerűen megad egy helyes y-t és az összes feltétel felírásával és ellenőrzésével világosan megmutatja, hogy az helyes, az természetesen maximális pontszámot ér. Ha viszont az $yA = 0$, $y \ge 0$, $yb < 0$ feltételek felírása és ellenőrzése hiányzik, akkor egy y puszta megadása nem ér pontot – függetlenül attól, hogy az egyébként helyes vagy sem.

A 3. feladat megoldása. a) A megadott lineáris programban a változók nemnegativitása is szerepel a feltételek között, ezért érdemes azt $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ alakúnak tekinteni, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(1 pont)}$$

$$c = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 9 & -6 \end{pmatrix}.$$

(Amint látható, a feltételek között szereplő $7x_2 + 9x_3 \geq 0$ egyenlőtlenséget helyettesítettük a (-1)-gyel való beszorzottjával.)
Most a duálist a tanult $\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{aligned} &\min\{y_1 + y_3\} \\ &\text{ha} \\ &y_1 + y_3 \geq 5 \\ &2y_1 - 7y_2 + 3y_3 \geq 9 \\ &3y_1 - 9y_2 - 3y_3 \geq 9 \\ &-y_1 - 2y_3 \geq -6 \\ &y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(5 pont)}$$

A duális felírásáért járó 5 pontból minden lényeges elvi hiba (így például egyenlőtlenségek helyett egyenletek szerepeltetése, a nemnegativitási feltételek elmaradása, a célfüggvény hiánya vagy minimalizálás helyett maximalizálás előírása) 4 pont levonást jelentsen.

b) A megadott primál megoldást a célfüggvénybe helyettesítve kapjuk, hogy az azon felvett célfüggvényérték $10 - 6 = 4$. A kérdés tehát az, hogy a primál feladat maximumértéke egyenlő-e 4-gyel. (1 pont)
Ha így volna, akkor a dualitástétel miatt a duális minimuma is 4 volna (1 pont)
(hiszen ebben az esetben a primál feladat megoldhatósága és a célfüggvény felülről korlátossága teljesülne, így a dualitástétel alkalmazható volna). (0 pont)
Ez azonban lehetetlen: a duális feladat első, $y_1 + y_3 \geq 5$ egyenlőtlensége miatt a duális célfüggvény (vagyis $y_1 + y_3$) értéke minden duális megoldáson legalább 5, így a duális minimuma is legalább 5. (3 pont)
Így a megadott primál megoldás nem optimális. (1 pont)
A b) kérdésre egy másik helyes indoklás a következő: az $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ választással a primál feladatnak egy olyan megoldását adtuk meg, amin felvett célfüggvényérték 5. Így a feladatban megadott primál megoldás nem optimális (mert az azon felvett célfüggvényérték csak 4).

(Megjegyezzük, hogy a b) kérdésre adott egyik megoldásból sem derül ki, hogy a primál célfüggvénye felülről korlátos-e a megoldáshalmazán; egyik indoklás sem zárja ki, hogy a primál maximuma ne létezzen. A valóságban létezik és az értéke 5, de ennek a megmutatására nincs szükség egy teljes értékű megoldáshoz.)

A 4. feladat megoldása. a) Mivel nem teljes gráfunk van, a bemenet nem metrikus, így a megoldást metrizálással kell kezdenünk.(Máshogy is indokolhatjuk persze, hogy a bemenet nem metrikus.) (1 pont)
Ehhez meg kell keresnünk az összes pontpárra a pár tagjai közti legrövidebb utak hosszát, (1 pont)
de ebből valójában csak a T-beli csúcsok közti legrövidebb úthosszakra lesz szükség. (1 pont)
(Ha valaki kiszámolja az összes párra a legrövidebb utak hosszait (helyesen), az természetesen nem hiba, jár rá az előző 2 pont.)
Ezek az $(a, b), (a, c), (a, e), (b, c), (b, e), (c, e)$ párokra rendre $1, 2, 3, 3, 4, 1$. (Ezt nem kell indokolni.)(1 pont)
(Számolási hibáért csak akkor vonjunk le pontot, ha az T-beli csúcsok közt menő élet érint.)
A metrizálás után ezek lesznek a kérdéses élek súlyai, (1 pont)
így az algoritmus következő lépésében, amikor a T által feszített részgráfban minimális összsúlyú feszítőfát keresünk, a két 1 súlyú és a 2 súlyú élet kell választanunk (mivel ezek fát alkotnak). (1 pont)
Most az ezen élekhez tartozó legrövidebb utakat kell megkeresnünk az eredeti gráfban, ezek $a - b, c - e$, $a - d - c$, (1 pont)
végül ezen utak éleinek uniójában (1 pont)
kell egy minimális összsúlyú feszítőfát keresnünk, (1 pont)
ami az $(a, b), (a, d), (c, d), (c, e)$ élekből áll, ez lesz a kimenet. (1 pont)

b) A kapott kimenet összsúlya 4, ez optimális lesz, mert az egyetlen Steiner-pontot (d-t) nem tartalmazó Steiner-fák legalább 5 súlyúak, a d-t tartalmazók (vagyis a gráf feszítőfái) közt pedig a kapott (csak 1 súlyú élekből álló) feszítőfa nyilván minimális súlyú. (2 pont)

Az 5. feladat megoldása.

A bemenet mérete (a felső egészrészeket elhagyva) $n = \log a + \log b + \log c$. (2 pont)

Az a és b számok szokásos szorzása természetesen polinomiális időben megvalósítható (a lépésszám felülről becsülhető n^2 alkalmas konstansszorosával, de ezt nem muszáj taglalni). (1 pont)

Az ezt követően szükséges összeadások mind elvégezhetők polinom időben, (1 pont)

legalábbis az aktuális bemenet méretében, (1 pont)

ami sosem haladja meg a $2 \log abc = \log a + \log b + \log c = 2n$-et. (1 pont)

Ezek után világos, hogy a teljes eljárás akkor és csak akkor lesz polinomiális, ha az összeadások száma polinomiális. (2 pont)

Mivel $c - 1$ összeadást végzünk és $c \leq \log ab = \log a + \log b \leq n$, az összeadások száma polinomiális és így a teljes eljárás is az. (4 pont)