Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok
2022. május 17.

1. A $G = (A, B; E)$ teljes páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen az alábbi mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem (minden $1 \le i, j \le 4$ esetén). Futtassuk G-re a maximális összsúlyú teljes párosítás keresésére tanult Egerváry-algoritmust és adjuk meg az eredményként kapott maximális összsúlyú teljes párosítást.

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 8 & 6 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(A feladat tehát nem csak egy maximális összsúlyú teljes párosítás meghatározása, hanem az algoritmus futásának a dokumentálása a közben keletkező minden adat megadásával.)

2. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) A primál feladatot egy LP szolver programmal megoldva azt kaptuk, hogy a célfüggvény (például) a változók következő értékeire veszi fel a maximumát: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$. Adjuk meg a duális feladat egy, a célfüggvényt optimalizáló megoldásában az y_1 duális változó értékét.

$$\begin{aligned} &\max\{2x_1 + x_2 - x_3 + x_4\} \\ &\text{ha} \\ &9x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 \le 5 \\ &4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \ge 0 \\ &17x_1 + x_2 - 4x_3 + 19x_4 \le 0 \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

3. Egy probléma bemenete az $x > 1$ egész szám. Döntsük el, hogy a problémára adott alábbi lépésszámú algoritmusok polinomiálisak-e.

a) $(\log x)^{\log\log\log x}$

b) $(\log\log\log x)^{\log x}$

4. Igaz-e, hogy a halmazfedés problémára tanult approximációs algoritmus csak egyféle kimenetet adhat, ha az összes részhalmaz költsége azonos, de az összes részhalmaz mérete különböző?

5. Legyenek egy 7 csúcsú teljes gráf csúcsai az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ számok, az $\{i, j\}$ él súlya pedig $i + j$ minden $1 \le i, j \le 7, i \ne j$ esetén.

a) Mutassuk meg, hogy ez az élsúlyozás metrikus.

b) Hajtsuk végre és dokumentáljuk a gráfon az utazóügynök probléma közelítésére tanult Christofides-algoritmust.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér. Az aláíráshoz szükséges minimális pontszám 24. Elégséges megajánlott jegyhez legalább 33, közepeshez 42, jóhoz 51 pontot kell elérni.

Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2022. május 17.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

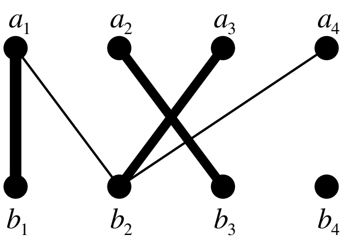
Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

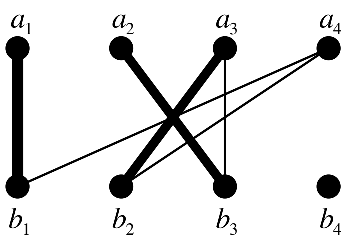
Az 1. feladat megoldása. Az algoritmus futtatását az inicializálással kezdjük: a kezdeti párosítás $M = \emptyset$, a kezdeti címkézésben pedig a B-beli csúcsok címkéje 0, az A-belieké pedig a rájuk illeszkedő élek súlyának maximuma:

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4
$c(v)$	:	7	8	8	6	0	0	0	0

(1 pont)

Most meghatározzuk a c-re nézve szoros élek gráfját (vagyis azokat az $e = \{a, b\}$ éleket, amikre $w(e) = c(a) + c(b)$); lásd az alábbi, bal oldali ábrát. Majd a szoros élek gráfjában maximális párosítást keresünk (a javítóutas algoritmussal). A kapott M három élű, lásd (például) az alábbi, bal oldali ábrán vastagított éleket. (1 pont)





Rátérünk a címkézés módosítására. A párosítatlan A-beli, illetve B-beli csúcsok halmaza $A_1 = \{a_4\}$ és $B_1 = \{b_4\}$. Alternáló úton csak a b_2 és a_3 csúcsok érhetők el, ezért ezek közül az A-beliek, illetve B-beliek halmaza $A_2 = \{a_3\}$, illetve $B_2 = \{b_2\}$. Így a maradék (alternáló úton el nem érhető, de párosított) A, illetve B-beliek halmaza $A_3 = \{a_1, a_2\}$, illetve $B_3 = \{b_1, b_3\}$. (1 pont)

Az algoritmus működési szabálya szerint az $A_1 \cup A_2 = \{a_3, a_4\}$ és a $B_1 \cup B_3 = \{b_1, b_3, b_4\}$ halmazok halmazok közti élek mindegyikére ki kell számítani a $c(a) + c(b) - w(e)$ „fölösleget", majd ezek minimumát kell venni. Itt az a_3-ból induló (és $B_1 \cup B_3$-ba menő) élek fölöslegei rendre

3, 2 és 5, az a_4-ből induló élek fölöslegei pedig 2, 3 és 5. Ezeknek a minimuma tehát $\delta = 2$. (1 pont)
Ezek után a módosított címkézés meghatározásához $A_1 \cup A_2$ elemein δ-val csökkenteni, B_2 elemein pedig δ-val növelni kell a jelenlegi címkézést. Így a következőt kapjuk:

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4
$c(v)$	:	7	8	6	4	0	2	0	0

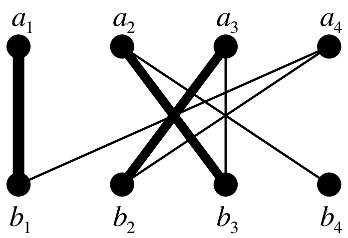
(1 pont)

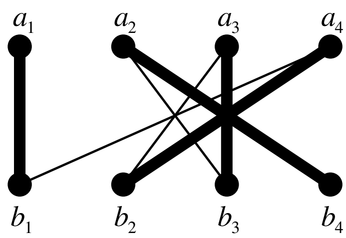
Ezzel az algoritmus egy teljes ciklusát végrehajtottuk, ismét a (már módosított c-hez tartozó) szoros élek meghatározásával folytatjuk. A korábbi szoros részgráfhoz képest három változás történik: egyrészt $\{a_1, b_2\}$ megszűnik szorosnak lenni, (1 pont)
másrészt $\{a_3, b_3\}$ és $\{a_4, b_1\}$ új szoros élek (lásd az fenti, jobb oldali ábrát). (1 pont)
(Ezek a változások egyrészt a címkézésből és a megadott élsúlyokból közvetlenül is kiolvashatók, de a fentiekből is következik: $\{a_1, b_2\}$ volt az egyetlen A_3 és B_2 közötti él, a δ meghatározásakor pedig a minimum az $\{a_3, b_3\}$ és $\{a_4, b_1\}$ éleken vétetett föl.)
Az új szoros részgráfban a javítóutas algoritmus nem talál javítóutat (hiszen b_4-re nem illeszkedik él), így most nem változik az M párosítás és a párosítatlan csúcsok halmaza sem: $A_1 = \{a_4\}$ és $B_1 = \{b_4\}$. Viszont most már minden más csúcs elérhető alternáló úton (hiszen $a_4 - b_1 - a_1$ és $a_4 - b_2 - a_3 - b_3 - a_2$ is alternáló utak), így $A_2 = \{a_1, a_2, a_3\}$ és $B_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$ (valamint $A_3 = B_3 = \emptyset$). (1 pont)
Ezért δ meghatározásához most az $A_1 \cup A_2 = A$ és a $B_1 \cup B_3 = \{b_4\}$ halmazok halmazok közti élek fölöslegeit vizsgáljuk: 3, 2, 3, 3. Így ismét $\delta = 2$. (1 pont)
A címkézés újbóli módosításához pedig az $A_1 \cup A_2 = A$ halmazon csökkentünk δ-val, $B_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$ elemein pedig növelünk δ-val:

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4
$c(v)$	:	5	6	4	2	2	4	2	0

(1 pont)

A szoros részgráfban most csak egyetlen változás történik: $\{a_2, b_4\}$ szorossá változik (lásd az alábbi, bal oldali ábrát). (1 pont)





Így viszont a javítóutas algoritmus már talál javítóutat: $a_4 - b_2 - a_3 - b_3 - a_2 - b_4$. Ementén javítva (vagyis a párosított és párosítatlan élek szerepét felcserélve) a fenti, jobb oldali ábrán látható M párosítást kapjuk. Mivel ez már teljes párosítás, ezért az algoritmus itt megáll. (1 pont)

A 2. feladat megoldása.

a) A megadott lineáris programban a változók nemnegativitása is szerepel a feltételek között, ezért érdemes azt $\max\{cx : Ax \le b, x \ge 0\}$ alakúnak tekinteni, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -4 & 5 \\ -4 & -1 & 3 & -2 \\ 17 & 1 & -4 & 19 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2 pont)

(Amint látható, a feltételek között szereplő $4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geq 0$ egyenlőtlenséget helyettesítettük a (-1)-gyel való beszorzottjával.)
Most a duálist a tanult $\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{aligned}&\min\{5y_1\}\\ &\text{ha}\\ &9y_1 - 4y_2 + 17y_3 \geq 2\\ &3y_1 - y_2 + y_3 \geq 1\\ &-4y_1 + 3y_2 - 4y_3 \geq -1\\ &5y_1 - 2y_2 + 19y_3 \geq 1\\ &y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\end{aligned}$$

(4 pont)

A duális felírásáért járó 4 pontból minden lényeges elvi hiba (így például egyenlőtlenségek helyett egyenletek szerepeltetése, a nemnegativitási feltételek elmaradása, a célfüggvény hiánya vagy minimalizálás helyett maximalizálás előírása) 3 pont levonást jelentsen.

b) A megadott primál megoldást a célfüggvénybe helyettesítve kapjuk, hogy a primál feladat maximumértéke $1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 2$. (1 pont)
Mivel a feladat szövegéből kiderül, hogy a primál feladat rendszere megoldható és a célfüggvénye felülről korlátos a megoldáshalmazán (hiszen a feladat megad egy maximumhelyet), ezért a dualitástétel feltételei teljesülnek, így az alkalmazható. (1 pont)
Következésképp a duális feladat minimumértéke is 2. (2 pont)
Ebből tehát egy, a célfüggvényt minimalizáló duális megoldásban $5y_1 = 2$, vagyis $y_1 = \frac{2}{5}$. (2 pont)
A primál feladatot felfoghatjuk $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakúnak is és erre használhatjuk a duális eredeti definíció szerinti alakját, vagyis a $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ alakot. Ekkor a változók nemnegativitását előíró négy egyenlőtlenség is az $Ax \leq b$ rendszer része, vagyis A-nak és b-nek 7 sora van. Ennek megfelelően a duális egy 7 változós lineáris program – ami azonban a tanultak szerint ekvivalens a fent kapottal (és erre is igaz, hogy egy optimális megoldásában $y_1 = \frac{2}{5}$).

A 3. feladat megoldása. A bemenet mérete (az egészrész jelet és a plusz 1-et hanyagolva) $n = \log x$. (Természetesen nem baj, ha valaki az egészrészt és a plusz 1-et nem hanyagolja el.) (2 pont)
a) A kérdéses lépésszám a bemenet méretében megadva $n^{\log\log n}$. (1 pont)
Mivel a kitevő végtelenhez tart (ha n végtelenhez tart), (2 pont)
ezért $n^{\log\log n}$ semmilyen c_1 és c_2 konstansok mellett sem korlátozható felülről $c_1 n^{c_2}$-vel, így ez a lépésszám nem polinomiális. (2 pont)
b) A kérdéses lépésszám a bemenet méretében megadva $(\log\log n)^n$. (1 pont)
Kellően nagy x ($x \geq 2^{16}$) esetén teljesül, hogy $\log\log n \geq 2$, (2 pont)
ekkor $(\log\log n)^n > 2^n$, vagyis ez a lépésszám sem polinomiális. (2 pont)
(Ha 2^n helyett beérjük c^n-nel valamilyen $c > 1$ mellett, akkor $x \geq 2^{16}$ helyett elég $x > 16$ is.)

A 4. feladat megoldása. Az állítás nem igaz. (0 pont)
Legyenek az alaphalmaz elemei a, b, c, d, a részhalmazok $\{a, b, c\}$, $\{a, d\}$ és $\{d\}$, mindhárom részhalmaz súlya legyen 1. Ez valóban lehet a probléma bemenete, hiszen a részhalmazok fedik az alaphalmazt és a kívánt feltételeknek is megfelelnek (méret, súly). Az algoritmus először azt a halmazt választja ki, amelyikre a legkisebb az egy (új) elemre eső költség, vagyis $\{a, b, c\}$-t. A következő lépésben az egy új elemre eső költség az $\{a, d\}$ és a $\{d\}$ halmaz esetében is 1, így mindkettőt választhatja az algoritmus. Bármelyiket választjuk is, a fedés elkészült, így az algoritmus véget ér. A kimenet tehát valóban többféle is lehet. (12 pont)
Ha valaki csak azt látja be, hogy az algoritmus többféleképp is lefuthat, de a példájából következik a ténylegesen bizonyítandó állítás is, az 10 pontot kapjon. Akinek a példájából ez nem

következik, az 7 pontot kapjon. Aki annyit állapít meg, hogy olyan példát kell keresnie, ahol valamely lépés során többféle választási lehetősége is lesz az algoritmusnak, az 2 pontot kapjon.

Természetesen rengeteg más ellenpélda is van. Jó ellenpélda, megfelelő indoklással 12 pont. Jó ellenpélda hiányos indoklással 2-11 pont (minőségtől függően), jó ellenpélda indoklás nélkül 0 pont. Ha valaki megpróbálja bebizonyítani az állítást és demonstrálja, hogy érti az algoritmust, akkor (meggyőző erőtől függően) 0-2 pontot kapjon.

Az 5. feladat megoldása. a) Az $\{i, j\}$ és a $\{j, k\}$ él összsúlya $i + 2j + k$, míg az $\{i, k\}$ él súlya $i + k$. Mivel k nem negatív (sőt, $k \geq 1$), az élsúlyozás valóban metrikus. (2 pont)
b) Az algoritmus először egy minimális összsúlyú F feszítőfát keres a Kruskal-algoritmus segítségével, így sorban az $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}$ éleket választja. (2 pont)
A következő lépésben a páratlan fokú csúcsok által feszített részgráfban keres minimális összsúlyú teljes párosítást. A páratlan fokú csúcsok a $2, 3, 4, 5, 6, 7$ és az ezen csúcsokat fedő teljes párosítások bármelyikének összsúlya ezen számok összege lesz, így mindegy, hogy melyiket választjuk, válasszuk pl. a $\{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}$ éleket. (3 pont)
Ezt követően a kapott élhalmazban Euler-körsétát kell keresnünk, ez lehet pl. $1 - 2 - 3 - 1 - 4 - 5 - 1 - 6 - 7 - 1$. (2 pont)
Végül az Euler-körsétát Hamilton-körré vágjuk le a tanult módon, vagyis az Euler-körsétán végighaladva a legalább másodszor előforduló csúcsokat (az utolsó csúcs kivételével) kihagyjuk a csúcsok fenti felsorolásából, így az $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 1$ Hamilton kört kapjuk kimenetként. (3 pont)

Könnyen látható, hogy a gráfban minden Hamilton-kör súlya azonos, mégpedig a csúcsoknak megfelelő számok összegének kétszerese. Ez a megfigyelés természetesen nem helyettesíti a b) feladat megoldását, de aki észreveszi és indokolja is, az kaphat rá 1 pontot, ha egyébként nem a maximális pontszámot kapná.