Rendszeroptimalizálás

Pótzárthelyi feladatok

a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz

2021. május 11.

1. Mutassuk meg a Farkas-lemma segítségével, hogy az alábbi lineáris egyenletrendszernek nincs olyan megoldása, amiben mind a három változó értéke nemnegatív. (Vagyis adjunk meg egy olyan vektort, ami a Farkas-lemma értelmében bizonyítja a rendszer nemnegatív számokkal való megoldhatatlanságát.)

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 12x_3 &= 7 \\ 4x_1 + 3x_2 - 16x_3 &= 9 \end{aligned}$$

2. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. Ha a válasz igen, akkor indokoljuk ezt meg; ha nem, akkor adjunk rá konkrét ellenpéldát (és mutassuk meg róla, hogy az valóban ellenpélda).

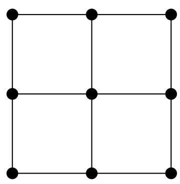
a) Ha a primál lineáris programozási feladat egyenlőtlenségrendszere megoldható, akkor a duális feladat rendszere is megoldható.

b) Ha a duális lineáris programozási feladat egyenlőtlenségrendszere megoldható, akkor a primál feladat rendszere is megoldható.

c) A primál és a duális lineáris programozási feladatok egyenlőtlenségrendszerei közül legalább az egyik megoldható.

3. Egy kilenc csúcsú G élsúlyozott teljes gráf csúcsai legyenek $a, b, c, d, e, f, g, h, i$. Az ab, ac, ad, ae élek súlya legyen 1, az összes többi él súlya legyen 3. Hajtsuk végre és dokumentáljuk a Steiner-fa problémára tanult közelítő algoritmust a gráfra $T = \{b, c, d, h\}$ esetén.

4. Adjuk meg az alábbi gráfra a maximális páros részgráf probléma approximációjára tanult második algoritmus egy olyan lefutását, melyre nem kapunk optimális megoldást.



5. Egy probléma bemenete az (a, b) pozitív egészekből álló számpár. Döntsük el, hogy az alábbi lépésszámú algoritmusok közül melyek polinomiálisak.

a) $\sqrt[a]{b}$

b) $\sqrt[\log 2a]{\log 2b}$

Minden feladat 12 pontot ér. Az aláíráshoz szükséges minimális pontszám 24. Elégséges megajánlott jegyhez legalább 33, közepeshez 42, jóhoz 51 pontot kell elérni.

Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató

a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz

2021. május 11.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Az 1. feladat megoldása. A rendszer mátrixos alakja $Ax = b, x \geq 0$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -12 \\ 4 & 3 & -16 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A Farkas-lemma (második alakjának) értelmében az $Ax = b, x \geq 0$ rendszer megoldhatatlanságát egy olyan $y = (y_1, y_2)$ sorvektor bizonyítja, amire $yA \geq 0$ és $yb < 0$. (2 pont)

Ezt részletesen kiírva a következő feltételeket kapjuk:

$$\begin{array}{lr} (1) & 3y_1 + 4y_2 \geq 0 \\ (2) & y_1 + 3y_2 \geq 0 \\ (3) & -12y_1 - 16y_2 \geq 0 \\ (4) & 7y_1 + 9y_2 < 0 \end{array} \qquad \text{(3 pont)}$$

(3)-at (-4)-gyel osztva $3y_1 + 4y_2 \leq 0$, amiből (1)-gyel együtt $3y_1 + 4y_2 = 0$ következik. Ebből $y_2 = -\frac{3}{4}y_1$, amit egyrészt (2)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy $-\frac{5}{4}y_1 \geq 0$, vagyis $y_1 \leq 0$; másrészt (4)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy $\frac{1}{4}y_1 < 0$, vagyis $y_1 < 0$. (3 pont)

Így a rendszer megoldhatatlanságát bizonyítja a Farkas-lemma (második alakjának) értelmében minden, az $y_1 < 0$ és $y_2 = -\frac{3}{4}y_1$ feltételeknek megfelelő $y = (y_1, y_2)$ vektor, például $y = (-4, 3)$ is (amit az (1)-(4) feltételek gyors kipróbálásával ellenőrizhetünk). (3 pont)

A Farkas-lemma második alakjának kimondása az általános alapelveknek megfelelően önmagában nem ér pontot (így nem jár érte a másodikként írt 2 pont sem), csak akkor, ha a helyes alkalmazására való törekvés a megoldásból látszik. A másodikként írt 2 pont tehát annak a felismeréséért jár, hogy ebben a helyzetben a Farkas-lemma második alakja alkalmazható és az egy, a fentebb írtnak megfelelő tulajdonságú y vektor keresését teszi szükségessé. Ha egy megoldó az (1)–(4) feltételek részletes kiírása helyett megad egy helyes y vektort (például $y = (-4, 3)$-at) és a Farkas-lemma második alakjának a feltételeit erre (jól láthatóan) leellenőrzi, az maximális pontot érhet (akkor is, ha y meghatározásának a lépéseit a fentiek szerint nem dokumentálja).

Az 1. feladat egy másik megoldása azonos a fentivel a pontozás szerinti első 1+2 pontig. Innen:

A feladat megoldható az előadáson tanult geometriai módszerrel is (mert A-nak csak két sora van). Ha A oszlopait sorra $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ jelöli, akkor ezeket és $\underline{b}$-t ábrázolva látszik, hogy az $\underline{a}_i$-kből nemnegatív együtthatós lineáris kombinációval kifejezhető x vektorok halmaza (vagyis az $Ax = b$, $x \geq 0$ rendszer megoldáshalmaza) az $y = \frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes fölötti félsík, ami $\underline{b}$-t nem tartalmazza (és aminek $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_3$ a határán, $\underline{a}_2$ a belsejében van). (2 pont)
Így a tanultak szerint az $yA \geq 0$, $yb < 0$ rendszer megoldása lesz minden olyan y, ami egy olyan, origón átmenő e egyenesnek a megoldáshalmaz irányába mutató normálvektora, ami a megoldáshalmazt $\underline{b}$-től elválasztja (vagyis az e által határolt félsík a megoldáshalmazt tartalmazza, de $\underline{b}$-t nem). (2 pont)
Ebben az esetben egyetlen ilyen e egyenes van és az éppen az $y = \frac{4}{3}x$ egyenes, (2 pont)
aminek az $y = (-4, 3)$ vektor (vagy ennek bármilyen pozitív skalárszorosa) a megoldáshalmaz irányába mutató normálvektora, így az $yA \geq 0$, $yb < 0$ rendszer megoldása. (3 pont)

A 2. feladat megoldása.

a) Az állítás hamis. Példa erre a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ feladat az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = (1)$ és $c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ választással. Valóban, a primál rendszere itt $x_1 + x_2 \leq 1$, ami nyilván megoldható; a duális $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ feladat rendszere pedig $y_1 = 0$, $y_1 = 1$, $y_1 \geq 0$, ami pedig nyilván nem megoldható. (4 pont)

b) Az állítás hamis. Példa erre a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ feladat az $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ és $c = (1)$ választással. Valóban, a duális $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ feladat rendszere itt $y_1 - y_2 = 1$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, ami nyilván megoldható (például $y_1 = 1$, $y_2 = 0$); a primál rendszere pedig $x_1 \leq 1$, $-x_1 \leq -2$, ami pedig nyilván nem megoldható (mert az utóbbi feltételből $x_1 \geq 2$). (4 pont)

c) Az állítás hamis. Példa erre a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ feladat az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ és $c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ választással. Valóban, a primál rendszere itt $x_1 + x_2 \leq 1$, $-x_1 - x_2 \leq -2$, ami nyilván nem megoldható (mert az utóbbi feltételből $x_1 + x_2 \geq 2$). A duális $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ feladat rendszere pedig $y_1 - y_2 = 0$, $y_1 - y_2 = 1$ $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, ami szintén nem megoldható (mert a két egyenlet ellentmond egymásnak). (4 pont)

Természetesen mindhárom esetben rengeteg jó ellenpélda létezik. A három részfeladatért járó 4 pontos részpontszámok csak különösen indokolt esetben oszthatók tovább; például kisebb pontatlanság esetén (legföljebb) 1 pont levonható, a primál/duál rendszerek megoldhatóságának vagy nem megoldhatóságának hiányos indoklásáért ennél több is. Nem ér viszont pontot önmagában sem az állítások hamisságának a deklarálása, sem egy konkrét LP feladat felírása (függetlenül attól, hogy az az adott állításra jó ellenpélda-e), sem annak a duálisának a felírása. Részpontszám csak abban az esetben jár, ha a leírtakból kiderül, hogy a megoldó az adott állítás hamis voltáról valóban meggyőződött. Ha egy megoldó egy részfeladatban a duális felírásában lényeges elvi hibár vét (így például egyenletek helyett egyenlőtlenségeket ír vagy fordítva, elhagyja a nemnegativitási feltételeket vagy a célfüggvényt vagy minimalizálás helyett maximalizálást ír elő), az az adott részfeladatra nem kaphat pontot.

A 3. feladat megoldása. A bemenet nem metrikus, mert pl. a bc él súlya 3, míg az ab és ac élek súlyösszege csak 2. (1 pont)
Az első lépésünk tehát a metrizálás kell legyen. (1 pont)
(Az első 2 pontot adjuk meg annak is, aki nem vizsgálja, hogy metrikus-e a bemenet, hanem automatikusan a metrizálással kezdi az algoritmust, feltéve, hogy az nagyjából helyes.)
Ehhez meg kell keresnünk az összes pontpárra a pár tagjai közti legrövidebb utak hosszát, (1 pont)
de ebből valójában csak a T-beli csúcsok közti legrövidebb úthosszakra lesz szükség. (1 pont)

(Ha valaki kiszámolja az összes párra a legrövidebb utak hosszait (helyesen), az természetesen nem hiba, jár rá az előző 2 pont.)
A kérdéses úthosszak a bc, bd, cd párok esetén 2, a hb, hc, hd párok esetén 3. (1 pont)
A metrizálás után ezek lesznek a kérdéses élek súlyai, (1 pont)
így az algoritmus következő lépésében, amikor a T által feszített részgráfban minimális összsúlyú feszítőfát keresünk, két 2 súlyú és egy 3 súlyú élet fogunk választani, legyenek ezek pl. bc, cd, dh. (1 pont)
Most az ezen élekhez tartozó legrövidebb utakat kell megkeresnünk az eredeti gráfban, ezek $b-a-c, c-a-d, d-h$, (2 pont)
végül ezen utak éleinek uniójában (1 pont)
kell egy minimális összsúlyú feszítőfát keresnünk, (1 pont)
ami a ba, ca, da, hd élekből áll, ez lesz a kimenet. (1 pont)

Az utolsó előtti pont akkor jár, ha a megoldó tisztában van vele, hogy a kapott élhalmaz egy feszítőfáját kell megadni. Ha csak azért nem veszi be az összes élet (vagy felmerül ennek a gyanúja), mert akkor párhuzamos élek lennének a kimenetben, akkor még nem jár a pont.

A 4. feladat megoldása. A bemenetként kapott gráf páros gráf, (1 pont)
mert a középső csúcs szomszédait 1-es, minden más csúcsot 2-es színnel színezve jó színezést kapunk. (1 pont)
A probléma optimális megoldása tehát a gráf összes élét tartalmazza. (1 pont)
A maradék 9 pontból 7 jár az algoritmus helyes és kellően dokumentált futtatásáért és 2 annak megállapításáért, hogy nem kaptunk optimális megoldást, mert nem minden él került be a kiválasztott részgráfba. Ha ez utóbbi állítás nem teljesül (vagyis sikerült futtatni és dokumentálni az algoritmust, de az eredmény a feladat kérésével szemben optimális lett), akkor erre a részre legfeljebb 3 pontot adjunk. Ha valaki helyesen futtatja az algoritmust, de teljesen hiányzik a dokumentáció, akkor a 7 pontból legfeljebb 2 adható, részleges dokumentáció esetén minőségtől függően 3-6 pontot adjunk.

Az 5. feladat megoldása. A bemenet mérete $n = \lfloor \log a \rfloor + 1 + \lfloor \log b \rfloor$. (Nem baj, ha valaki az egészrészeket és plusz 1-eket elhanyagolva adja meg a méretet és később is ezt használja.) (2 pont)
a) Megmutatjuk, hogy a lépésszám nem polinomiális. (0 pont)
Ehhez elég azt megmutatni, hogy pl. $a = 1, b = 2^k$ esetén nem lesz polinomiális a lépésszám. (2 pont)
A bemenet mérete ekkor $n = k + 2$. (1 pont)
A lépésszám $\sqrt[a]{b} = 2^k = 2^{n-2}$, ami exponenciális n-ben, (1 pont)
így csakugyan nem polinomiális. (1 pont)

b) Megmutatjuk, hogy a lépésszám polinomiális. (0 pont)

$$\sqrt[\log 2a]{\log 2b} \le \sqrt{\log 2b} = \sqrt{1 + \log b} \le \sqrt{\lfloor \log a \rfloor + 1 + \log b} \le \sqrt{n},$$

(3 pont)
ahol az első egyenlőtlenség $a \ge 1$ és $b \ge 1$ miatt teljesül (ha csak a-ról ír valaki, még adjuk meg a pontot). (1 pont)
A lépésszámot így felülről tudtuk becsülni a bemenet méretének egy polinomjával, amivel az állítást beláttuk. (1 pont)