Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok

a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz

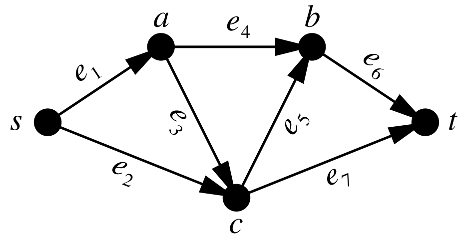
2020. május 12.

1. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Igaz-e, hogy az $x_1 = 9$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = -1$ választással a primál, az $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$ választással pedig a duális feladat egy-egy megoldását, illetve optimális megoldását adtuk meg?

$$\begin{aligned}&\max\{-3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4\}\\ &\text{ha}\\ &x_1 - x_3 + 2x_4 \geq 7\\ &2x_1 - 5x_2 - x_4 \geq 2\\ &2x_2 - x_3 - 4x_4 \geq 6\end{aligned}$$

2. Tekintsük a következő minimális költségű folyam feladatot: az alábbi ábrán látható gráfban keresünk az s-ből t-be menő, legalább 4 értékű folyamok között minimális költségűt, ha az élekhez tartozó $c(e)$ kapacitás és $k(e)$ költség értékek az alábbi táblázatban láthatók. Írjuk fel ezt a feladatot lineáris programként (vagyis adjunk meg egy olyan lineáris programozási feladatot, amelynek a megoldása ekvivalens a megadott minimális költségű folyam feladattal). A lineáris programot *ne* mátrixos alakban adjuk meg, hanem a változók, a feltételek és a célfüggvény (**1.** feladatban látotthoz hasonló alakú) kiírásával.



e	:	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
$c(e)$	:	3	2	1	2	2	2	3
$k(e)$	:	3	2	1	3	1	1	3

A folyam feladatot tehát *nem szükséges megoldani*, a feladat csupán a lineáris programként való megfogalmazás.

3. Totálisan unimodulárisak-e az alábbi mátrixok? (A két mátrix között csak a jobb felső sarokban álló elemben van különbség.)

$$\text{a)}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix} \qquad \text{b)}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

4. Tekintsük az `{a,c,d,e,f,g,h,i,k,l,m,n,o,p,r,s,t,v}` betűhalmazt, és az elemeiből képzett alábbi szavakat, mint részhalmazokat (a szavak utáni zárójelben lévő szám jelenti az adott halmaz költségét):

`tim (3), phil (3), margo (3), dave (4), vector (4),`
`mark (5), agnes (5), edith (6), nefario (6), perkins (6)`

Hajtsuk végre ezen adatokkal a halmazfedés problémára tanult közelítő algoritmust.

5. Mutassuk meg a maximális élszámú páros részgráf keresésére tanult első approximációs algoritmusról (amely a csúcsok kettéosztásával kezdődik), hogy teljes gráf bemeneten futtatva optimális eredményt ad.

Minden feladat 12 pontot ér. Az aláíráshoz szükséges minimális pontszám 24. Elégséges megajánlott jegyhez legalább 33, közepeshez 42, jóhoz 51 pontot kell elérni.

Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
2020. május 12.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Az 1. feladat megoldása. a) A megadott lineáris program $\max\{cx : Ax \le b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix},$$
$$c = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$
(1 pont)

A duálist a tanult $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{aligned} &\min\{-7y_1 - 2y_2 - 6y_3\} \\ &\text{ha} \\ &-y_1 - 2y_2 = -3 \\ &5y_2 - 2y_3 = -4 \\ &y_1 + y_3 = 5 \\ &-2y_1 + y_2 + 4y_3 = 2 \\ &y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$
(4 pont)

A duális felírásáért járó 4 pontból minden lényeges elvi hiba (így például egyenlőtlenségek helyett egyenletek szerepeltetése, a nemnegativitási feltételek elmaradása, a célfüggvény hiánya vagy minimalizálás helyett maximalizálás előírása) 3 pont levonást jelentsen.

b) Behelyettesítve a primál és a duális rendszerébe a megadott értékeket azt kapjuk, hogy minden feltétel (beleértve a duális változók nemnegatív értékűségét is) teljesül. Így mindkét esetben megoldást kaptunk. (1 pont)

Mivel a megadott primál megoldáson a célfüggvényérték -33, ezért a primál maximuma legalább -33. (2 pont)

Mivel a megadott duális megoldáson is a célfüggvényérték -33, ezért a duális minimuma legföljebb -33. (2 pont)

Mivel a dualitástétel értelmében a primál maximuma és a duális minimuma egyenlő, ezért ez a közös érték csak -33 lehet. Ebből következik, hogy mindkét megadott megoldás optimális. (2 pont)

Ne vonjunk le pontot azért, ha a megoldó nem hivatkozik arra (bár ez elvileg szükséges volna), hogy a dualitástétel alkalmazható, mert a primál megoldható és a duális megoldhatósága miatt a célfüggvénye felülről korlátos. Ha egy megoldó észreveszi, hogy a közös célfüggvényérték -33, de ebből a tényből nem tud meggyőző indoklást adni arra, hogy a megadott megoldások miért optimálisak, akkor ez a megfigyelés önmagában összesen csak 1 pontot érjen (a b) feladatra adható utolsó 6 pontból). Az utolsó 2 pontért nem feltétlen szükséges a dualitástételre hivatkozni, elég arra a gyengébb állításra is, hogy a primál maximumértéke legföljebb a duális minimumértéke (mert a fenti gondolatmenetből már így is következik, hogy mindkét megoldás optimális).

A 2. feladat megoldása. A minimális költségű folyamfeladat tanult definíciója szerint minden élhez bevezetünk egy változót: x_i jelöli az e_i élen a folyam értékét minden $1 \leq i \leq 7$ esetén. (2 pont)
Az a, b és c csúcsokra fel kell kell írnunk a folyammegmaradási feltételeket:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 - x_1 &= 0 \\ x_6 - x_4 - x_5 &= 0 \\ x_5 + x_7 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(2 pont)}$$

Minden élre fel kell írnunk a rá vonatkozó kapacitás feltételt:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_3 &\leq 1 \\ x_4 &\leq 2 \\ x_5 &\leq 2 \\ x_6 &\leq 2 \\ x_7 &\leq 3 \end{aligned} \qquad \text{(2 pont)}$$

Minden élre fel kell írnunk a nemnegativitási feltételt: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$, $x_7 \geq 0$. (2 pont)
Elő kell írnunk, hogy a folyam értéke legalább 4 legyen: $x_1 + x_2 \geq 4$. (2 pont)
Végül fel kell írnunk a célfüggvényt, az összköltség minimalizálását:

$$\min\{3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7\}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ezzel az LP feladat felírása teljes. A folyam értékére vonatkozó feltétel $x_1 + x_2 \geq 4$ helyett lehet $x_1 + x_2 = 4$, vagy akár (t-nél mérve) $x_6 + x_7 \geq 4$ vagy $x_6 + x_7 = 4$ is.

A 3. feladat megoldása.

a) Ez a mátrix egy irányított gráf illeszkedési mátrixa – mégpedig a **2.** feladatban látott irányított gráfé. (Az oszlopok sorban az $e_1, \ldots, e_7$ éleknek, a sorok ábécé szerinti sorrendben a csúcsoknak felelnek meg). (3 pont)
Így a tanult tétel értelmében ez a mátrix totálisan unimoduláris. (3 pont)

b) Az 1. és 3. sorok, illetve a 3. és 7. oszlopok kereszteződésében kialakuló négyzetes részmátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(2 pont)}$$

aminek a determinánsa 2. (2 pont)
Így definíció szerint ez a mátrix nem totálisan unimoduláris. (2 pont)
(Ennek a részmátrixnak a megtalálását segíti, hogy az a) feladat megoldásából következően minden olyan részmátrix determinánsa, ami nem tartalmazza az első sort vagy az utolsó oszlopot 1, -1 vagy 0 kell legyen.)

A 4. feladat megoldása. Az algoritmus mindig azt a részhalmazt választja ki, amelyre a lehető legkisebb a halmaz költségének és az újonnan lefedett elemek számának hányadosa. (5 pont)
A fenti 5 pont annak jár, aki ténylegesen a leírtak szerint próbál meg eljárni (itt és a későbbiekben sem baj, ha valaki a reciprok értéket óhajtja minimalizálni). Aki csak (helyesen) kimondja, hogy mit kéne csinálni, de nem csinálja, vagy nem azt csinálja, az 2 pontot kapjon.
Az első lépésben a `margo` részhalmazt kell választanunk, mert ennek a legkisebb az egy új elemre eső költsége ($\frac{3}{5}$). (1 pont)
Ezt követően a `phil` részhalmaz jön, $\frac{3}{4}$ költséggel. (1 pont)
A következő halmaz a `vector` kell legyen, ez újabb 4 elemet fed le, 4 költséggel, (1 pont)
majd a `perkins` halmaz következik, itt a hányados $\frac{6}{3}$. (1 pont)

Az ezt követő lépésben a `dave` halmazra lesz minimális a hányados (4), (1 pont)
az utolsó beválasztott szó pedig a `nefario`, 6-os értékkel. (1 pont)
A kapott fedés tehát: {`margo, phil, vector, perkins, dave, nefario`}, költsége 26 (a költséget nem kell kiszámolni). (1 pont)

Az 5. feladat megoldása. N csúcsú teljes gráf esetén a maximális élszámú páros részgráfot akkor kapjuk, ha a két osztály méretének különbsége legfeljebb 1, vagyis páros N esetén a két osztály ugyanakkora, páratlan N esetén a méretük különbsége 1. A kérdéses élszám $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{N}{2} \rceil$. (2 pont)
Bár a bizonyítás a legkevésbé sem bonyolult, a hiányáért ne vonjunk le pontot, viszont ha valaki be is bizonyítja az állítást, annak adhatunk plusz 2 pontot, persze csak amíg a feladatra kapott pontszáma nem lépi túl a 12-t.

Az első algoritmus tetszőleges módon két osztályra bontja a gráf ponthalmazát, (1 pont)
majd megvizsgálja, hogy van-e olyan pont, amelyből a másik osztályba kevesebb él megy, mint a saját osztályába. (1 pont)
Ha van ilyen pont, akkor azt átteszi a másik osztályba. (1 pont)
Ezt az eljárást ismétli, amíg minden csúcsra igaz nem lesz, hogy legalább annyi él megy belőle a másik osztályba, mint a sajátjába. (1 pont)
Teljes gráf esetén ezért az átrakások pontosan addig folytatódnak, amíg a két osztály méretének különbsége legfeljebb 1 nem lesz, (1 pont)
hiszen egyrészt ekkor már leáll az algoritmus, (2 pont)
másrészt ennél korábban nem állhat le, (1 pont)
hiszen amíg a különbség legalább 2, addig a nagyobb osztályban lévő csúcsokból több él megy a másik osztályba, mint a sajátjukba. (2 pont)