Nagy házi feladat a Rendszeroptimalizálás tárgy Lineáris- és egészértékű programozás anyagrészéből

A feladat leírása

Az LP/IP anyagrészből kiadott nagy házi feladat a megoldótól azt kívánja meg, hogy a feladatban kitűzött problémát megfogalmazza (vagyis modellezze, formalizálja) lineáris vagy egészértékű programozási feladatként, ezt megoldja valamilyen LP/IP megoldó programmal, majd a kapott megoldást az eredeti feladat szövegének megfelelően értelmezze.

Mindez részletesen a következő lépéseket jelenti:

- Az LP/IP feladat változóinak bevezetése

  A változók alkalmas megválasztása a legfontosabb lépés a sikeres modellezés érdekében. Olyan változókat célszerű bevezetni, amelyek értékének az ismeretében választ tudnánk adni a problémában megfogalmazott kérdésre. Fontos, hogy a változók deklarálásakor pontos, világos megfogalmazásokra törekedjünk. (Például az „$x_3 = 3.$ termék” megfogalmazás homályos, félreviszi a megoldást. Helyette az „$x_3 =$ a 3. termékből gyártandó mennyiség tonnában mérve” vagy az „$x_3 =$ a 3. termék gyártására fordítandó idő a következő gyártási periódusban, órában mérve” megfogalmazások már pontosak, segítik a megoldást.)

- Az LP/IP feladat egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerének a meghatározása

  A feladat szövegéből fakadó feltételeket kell megfogalmazni a deklarált változókra felírt lineáris egyenletek és egyenlőtlenségek formájában. Fontos meggyőződni róla, hogy a felírt feltételek valóban lineárisak – különben az LP/IP feladatokra használható algoritmusok nem lesznek használhatók a probléma megoldására. Ha egyes változókra nemnegativitási feltételeket (vagy például felső korlátokat) kívánunk előírni, ezek is lineáris egyenlőtlenségekkel megfogalmazható feltételek, így ezekről se feledkezzünk meg itt gondoskodni.

- Az LP/IP feladat célfüggvényének meghatározása

  Itt is fontos meggyőződni róla, hogy a felírt célfüggvény valóban lineáris és így belefér az LP/IP hatókörébe. Annak a deklarálásáról sem szabad elfelejtkezni, hogy a célfüggvény minimalizálása vagy maximalizálása felel meg a feladat szövegének.

- Annak deklarálása, hogy a változók egészértékűek vagy tetszőleges valós értéket felvehetnek

  Az IP feladatokban a változók egészértékűsége is deklarálható, az LP feladatok esetében ez nem lehetséges. Mivel az IP feladatokat megoldó algoritmusok sokkal kevésbé hatékonyak (hiszen az IP NP-nehéz feladat, míg az LP polinomiális algoritmussal is megoldható probléma), ezért hacsak lehet, érdemes elkerülni az egészértékűségi feltételek felvételét – de persze sok esetben ez lehetetlen.

- A kapott LP vagy IP modell megoldása számítógéppel

  Számos ingyenes LP/IP megoldó szoftver elérhető a neten, ezek bármelyike használható a feladat megoldásához. Az utolsó szorgalmi héten az előadáson látni fogjuk, hogy a Microsoft Excel program Solver nevű add-injе, illetve az abban implementált „Simplex LP” algoritmus hogyan használható LP és (nem túl nagy méretű) IP feladatok megoldására. A nagy házi feladat természetesen ezt használva is megoldható. (Megjegyezzük, hogy az Excel által használt „Simplex LP” elnevezés némileg félrevezető: a szimplex algoritmus valójában csak lineáris programozási feladatok megoldására alkalmas. Azonban az Excelben implementált algoritmus egy erre épülő, Branch & Bound típusú eljárást is tartalmaz IP feladatok megoldására – persze exponenciális futásidőben.)

- A kapott eredmény értelmezése az eredeti feladat kontextusában

  A probléma megoldása akkor sikeres, ha a használt LP/IP megoldó szoftver kimenetéből választ tudunk adni a feladatban feltett kérdésre úgy, hogy a válasz értelmezhető legyen pusztán a feladat szövege alapján, a felírt LP/IP modell ismerete nélkül is.

Első mintafeladat

Egy biotermék kiskereskedő két különböző őstermelőtől, Ackermanntól és Bauertől vásárolja a friss biotejet. Ackermann 450 Ft-ot kér literjéért és naponta legföljebb 140 litert tud szállítani, Bauer 550 Ft-ért adja literjét, viszont naponta 200 litert tud biztosítani. A kereskedő három különböző bioboltban értékesíti a friss biotejet; az alábbi táblázatból kiderül, hogy az egyes boltokban mennyiért lehet eladni a biotej literjét, mennyi biotejet lehet eladni naponta, illetve mennyi járulékos költség (munkaerő, rezsi) származik egy liter biotej eladásából.

	Eladási ár (Ft / liter)	Napi eladható mennyiség (liter / nap)	Járulékos költség (Ft / liter)
1. bolt	820	150	30
2. bolt	950	110	40
3. bolt	1050	60	50

A fentieken kívül a biotej szállításának költségei a kistermelőktől a bioboltokig szintén a kereskedőt terhelik. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy mennyi költséggel jár egy liter biotej elszállítása az egyes termelőktől az egyes boltokig.

	1. bolt	2. bolt	3. bolt
Ackermann	10 Ft/liter	12 Ft/liter	20 Ft/liter
Bauer	12 Ft/liter	15 Ft/liter	18 Ft/liter

A kereskedő maximalizálni szeretné a biotej eladásából származó napi nyereségét (feltéve, hogy minden nap csak a friss, aznap hozott biotejet adhatja el).

Kérdések:

1. kérdés: Mekkora maximális napi profitot érhet el a biotermék kiskereskedő?

2. kérdés: Mennyi biotejet rendeljen a kiskereskedő naponta Ackermanntól, ha a maximális profit elérésére törekszik?

3. kérdés: Bauer felajánlja, hogy a napi 200 liternyi kapacitásán felül is tud további biotej mennyiséget szállítani, de a többletet már csak 600 Ft-os literenkénti áron. Mit válaszoljon erre a felvetésre a kiskereskedő?

Az első mintafeladat megoldása

Mivel mindkét őstermelőtől három különböző boltba szállíthat a kereskedő és az egyes boltokhoz más költség, illetve eladási ár értékek tartoznak, ezért a profit maximalizálásához mindkét őstermelő esetében tudnunk kell, hogy tőle az egyes boltokba mennyi biotejet érdemes szállítani. Így összesen hat változót vezetünk be: $x_{i,j}$ azt jelöli, hogy az i jelű ősermelőtől a j-edik boltba hány liter biotejet szállítson a kereskedő, ahol $i \in \{A, B\}$ (A, illetve B jelöli Ackermannt, illetve Bauert) és $j \in \{1, 2, 3\}$. Így például $x_{A,1}$ jelöli az Ackermanntól az 1. boltba szállítandó napi mennyiséget literben mérve.

Ekkor a két őstermelő napi kapacitásából a következő feltételek fakadnak:

$$x_{A,1} + x_{A,2} + x_{A,3} \leq 140$$
$$x_{B,1} + x_{B,2} + x_{B,3} \leq 200$$

Hasonlóan, a három bolt napi maximális eladási kapacitásából származó feltételek:

$$x_{A,1} + x_{B,1} \leq 150$$
$$x_{A,2} + x_{B,2} \leq 110$$
$$x_{A,3} + x_{B,3} \leq 60$$

A fentieken kívül természetesen elő kell írnunk mind a hat vátlozó nemnegatív voltát (hiszen szállítandó mennyiségeket mérnek):

$$x_{A,1} \geq 0, x_{A,2} \geq 0, x_{A,3} \geq 0, x_{B,1} \geq 0, x_{B,2} \geq 0, x_{B,3} \geq 0$$

A változókra vonatkozó további feltételeket a feladat szövege nem ír elő, így már csak a célfüggvényt kell meghatároznunk. Minden $i \in \{A, B\}$ és $j \in \{1, 2, 3\}$ pár esetén az i jelű őstermelőtől a j-edik boltba szállított biotejből fakadó literenkénti profitot úgy kapjuk meg, hogy j-edik boltban realizálható eladási árból levonjuk az i őstermelőnek fizetendő vételárat, a j-edik bolthoz tartozó literenkénti járulékos költséget és az i őstermelő és a j-edik bolt közötti literenkénti szállítási költséget. Például $i = A$ és $j = 1$ esetén a literenként keletkező profit $820 - 450 - 30 - 10 = 330$. Hasonlóan számítva a többi esetben is, az alábbi literenkénti profit értékeket kapjuk:

	1. bolt	2. bolt	3. bolt
Ackermann	330 Ft/liter	448 Ft/liter	530 Ft/liter
Bauer	228 Ft/liter	345 Ft/liter	432 Ft/liter

Így végül is a feladat maximalizálandó célfüggvénye a következő:

$$\max : 330x_{A,1} + 448x_{A,2} + 530x_{A,3} + 228x_{B,1} + 345x_{B,2} + 432x_{B,3}$$

Mivel az egyes őstermelőktől a boltokig szállítandó mennyiségek akár törtértékűek is lehetnek, ezért egészértékűségi feltételeket nem írunk elő a változókra. Ezzel tehát a problémát modellező lineáris programozási (LP) feladat elkészült.

Ezt a Microsoft Excel Solver add-injével megoldva a következő eredményt kapjuk:

$\max = 112\ 460$		
$x_{A,1} = 30$	$x_{A,2} = 110$	$x_{A,3} = 0$
$x_{B,1} = 120$	$x_{B,2} = 0$	$x_{B,3} = 60$

Ebből tehát kiderül, hogy az elérhető maximális napi profit, vagyis az 1. kérdésre a válasz: 112 460 Ft. Az is kiderül, hogy ennek eléréséhez Ackermanntól 30 litert kell szállítani az 1. boltba és további 110 litert a 2. boltba (a 3. boltba pedig semennyit). Így a 2. kérdésre a válasz: Ackermanntól a napi kapacitását kimerítő mennyiséget, 140 litert kell megrendelni. Végül az is kiderül, hogy Bauertől 120 litert kell szállítani az 1. boltba és további 60 litert a 3. boltba (a 2. boltba pedig semennyit) – vagyis Bauer napi 200 literes beszállítói kapacitásából az adott feltételek mellett csak 180 litert tud kihasználni a kiskereskedő. Így a 3. kérdésre az a válasz, hogy nem érdemes tőle további mennyiséget megrendelni (még a jelenlegi, 550 Ft-os áron sem).

Második mintafeladat

Egy egyetemi hallgató a következő tanévének a tervezésekor (egyéb tárgyak mellett) hét szabvál kurzus közül választhat, ezeket az A, B, ..., G betűk jelölik. A szabvál kurzusokat lepontozta az érdekességük szerint 1-től 3-ig (ahol az 1-es a dögunalmast, a 3-as az egész érdekesnek tűnőt jelöli) és elhatározta, hogy bármi történjen is, az általa felvett szabvál kurzusok átlagos érdekességi pontszáma legalább 2 kell legyen. Az alábbi táblázat mutatja az egyes kurzusok érdekességi pontszámát és a hozzájuk tartozó kredit értéket:

Kurzus	A	B	C	D	E	F	G
Érdekességi pontszám	2	2	3	1	1	3	3
Kreditszám	4	2	3	3	4	2	3

Kapacitáskorlátok miatt a hallgató legföljebb négyet tud felvenni a hét szabvál kurzus közül. További feltétel, hogy anyagbeli átfedések miatt a D és F kurzusok közül legföljebb az egyiket veheti fel, illetve hogy előtanulmányi követelmények miatt a C-t csak akkor veheti fel, ha a B-t is felveszi. Végül pedig órarendi ütközések miatt az A, E és G kurzusok közül legföljebb egyet vehet fel.

Melyik kurzusokat vegye fel a hallgató, ha a fenti feltételek figyelembe vétele mellett a lehető legtöbb kreditet szeretné megszerezni a felvett szabvál kurzusokból?

A második mintafeladat megoldása

A hallgatónak mind a hét kurzusról egy igen-nem döntést kell meghoznia, ezért mindegyik kurzushoz bevezetünk egy bináris változót: minden $i \in \{A, B, \ldots, F\}$ esetén x_i értéke 1, ha a hallgató az i kurzust felveszi és x_i értéke 0, ha nem veszi fel.

Először is gondoskodnunk kell róla, hogy a hét változó valóban bináris értékű legyen. Ehhez minden $i \in \{A, B, \ldots, F\}$ felvesszük a

$$0 \leq x_i \leq 1, \; x_i : \text{egészértékű}$$

feltételeket. Annak garantálásához, hogy a felvett kurzusok átlagos érdekességi pontszáma legalább 2 legyen, a

$$\frac{2x_A + 2x_B + 3x_C + x_D + x_E + 3x_F + 3x_G}{x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F + x_G} \geq 2$$

egyenlőtlenséget kell teljesíteni, hiszen a bal oldalon látható tört nevezője a felvett kurzusok számát, a számlálója pedig azoknak az összes érdekességi pontszámát fejezi ki. Fontos azonban látni, hogy ez az egyenlőtlenség nem lineáris, így ebben a formában nem vehetjük fel a készülő IP modellbe; könnyű azonban lineárissá alakítani, a nevezővel való szorzás és rendezés után a következő alakot kapjuk:

$$x_C - x_D - x_E + x_F + x_G \geq 0$$

Azt, hogy a hallgató legföljebb 4 kurzust vehet fel, az

$$x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F + x_G \leq 4$$

egyenlőtlenség fejezi ki. A D és F kurzusok anyaga közti átfedésből az

$$x_D + x_F \leq 1$$

feltétel fakad, a C és B közti előtanulmányi követelmény pedig az

$$x_B - x_C \geq 0$$

egyenlőtlenséggel írható le; valóban, ha $x_C = 0$, vagyis a C kurzust nem veszi fel a hallgató, akkor az $x_B \geq 0$ követelmény semmitmondó, ha viszont a C-t felveszi a hallgató és így $x_C = 1$, akkor az $x_B - 1 \geq 0$ feltétel miatt $x_B = 1$ is következik, vagyis a B-t is fel kell vennie. Végül az A, E és G közti órarendi ütközésnek az

$$x_A + x_E + x_G \leq 1$$

egyenlőtlenség felel meg.

A hallgató a felvett kurzusok összkreditszámát szeretné maximalizálni, amiből a

$$\max : 4x_A + 2x_B + 3x_C + 3x_D + 4x_E + 2x_F + 3x_G$$

célfüggvény adódik.

Ezzel elkészült a probléma egészértékű programozási (IP) modellje (ahol a változók egészértékűségét valóban ki kellett kötnünk annak garantálásához, hogy azok bináris értékűek legyenek). Ezt a Microsoft Excel Solver add-injével megoldva a következő eredményt kapjuk:

max = 12						
$x_A = 1$	$x_B = 1$	$x_C = 1$	$x_D = 1$	$x_E = 0$	$x_F = 0$	$x_G = 0$

Ebből tehát az derül ki, hogy a hallgató az összes előírt feltétel teljesítése mellett legföljebb 12 kreditet tud megszerezni a szabvál tárgyakból, amit az A, B, C és D kurzusok felvételével tud elérni.