Rendszeroptimalizálás

2018. február 20.

1. Formalizáljuk az alábbi lineáris programozási feladatokat az általános $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakban.

a)
$$\begin{aligned} &\max x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ &\text{ha} \\ &4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 10 \\ &7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 11 \\ &x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} &\min x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ &\text{ha} \\ &4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 10 \\ &7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 11 \\ &x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Használjuk a Farkas-lemmát annak bizonyítására, hogy az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszer nem megoldható.

$$\begin{aligned} &7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 2 \\ &2x_1 + 5x_2 - 6x_4 \geq -3 \\ &3x_1 + x_3 \geq 4 \\ &2x_1 - 3x_4 \leq 3 \end{aligned}$$

3. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak. (u és v oszlopvektorokat, a és b sorvektorokat jelöl, a 0 a nullvektort (is) jelöli, mindezeknek a dimenziója azonos.)

a) Ha $u \leq v$ és $u \neq v$, akkor $u < v$.
b) Ha $u + v \geq u$, akkor $v \geq 0$.
c) Ha $u \geq 0$ és $a \cdot u > 0$, akkor $a \geq 0$.
d) Ha $0 \leq a \leq b$ és $0 \leq u \leq v$, akkor $a \cdot u \leq b \cdot v$.

4. Tegyük fel, hogy az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható és cx felülről korlátos a megoldáshalmazán. Legyen $M = \max\{cx : Ax \leq b\}$. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások.

a) Ha $b \geq 0$, akkor $M \geq 0$.
b) Ha $b > 0$, akkor $M > 0$.

5. Tegyük fel, hogy az A mátrix minden eleme nemnegatív, továbbá A minden sora tartalmaz legalább egy pozitív elemet. Bizonyítsuk be, hogy az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható.

---

6. Írjuk fel az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszert $Ax \leq b$ alakban, majd bizonyítsuk be a Farkas-lemma felhasználásával, hogy a rendszer nem megoldható. (Vagyis adjunk meg egy vektort és mutassuk meg róla, hogy ez a Farkas-lemma értelmében bizonyítja a rendszer megoldhatatlanságát.) (ZH, 2013. április 22.)

$$\begin{aligned} &7x_1 - 3x_2 + 9x_3 - 5x_4 \geq 1 \\ &x_1 - 8x_4 = 5 \\ &x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 1 \\ &x_1 + x_3 - 3x_4 \leq 1 \end{aligned}$$

7. Tegyük fel, hogy az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható; továbbá bárhogyan választjuk ki a b vektor egyetlen elemét és módosítjuk azt egy tetszőleges új értékre, az így kapott b' vektorra is az $Ax \leq b'$ rendszer mindig megoldható. Mutassuk meg, hogy ekkor minden (megfelelő dimenziós) d vektorra az $Ax \leq d$ rendszer megoldható.

8*. Tegyük fel, hogy az $A_1x \leq b_1$ és $A_2x \leq b_2$ (n változós) lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldhatók, de nincsen közös megoldásuk. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $cx \leq \delta$ lineáris egyenlőtlenség (nem feltétlen olyan, ami akár az $A_1x \leq b_1$, akár az $A_2x \leq b_2$ rendszer része volna), amelyet az $A_1x \leq b_1$ rendszer minden megoldása kielégít és az $A_2x \leq b_2$ minden megoldása megsért.