

Véletlen gráfok és valós hálózatok

Csima Judit

BME, SZIT

2011. február 18.

Tartalom

1. Motiváció: miért pont véletlen gráfok?

Tartalom

1. Motiváció: miért pont véletlen gráfok?
2. A klasszikus modell:

Tartalom

1. Motiváció: miért pont véletlen gráfok?
2. A klasszikus modell: Erdős-Rényi véletlen-gráf modell

Tartalom

1. Motiváció: miért pont véletlen gráfok?
2. A klasszikus modell: Erdős-Rényi véletlen-gráf modell
 - definíció
 - jellemzői (legnagyobb komponens mérete, összefüggőség, fokszámeloszlás)

Tartalom

1. Motiváció: miért pont véletlen gráfok?
2. A klasszikus modell: Erdős-Rényi véletlen-gráf modell
 - definíció
 - jellemzői (legnagyobb komponens mérete, összefüggőség, fokszámeloszlás)
3. Milyen jellemzőik vannak a valós hálózatoknak?

Tartalom

1. Motiváció: miért pont véletlen gráfok?
2. A klasszikus modell: Erdős-Rényi véletlen-gráf modell
 - definíció
 - jellemzői (legnagyobb komponens mérete, összefüggőség, fokszámeloszlás)
3. Milyen jellemzőik vannak a valós hálózatoknak?
4. Jó (jónak tűnő) modellek a valós hálózatokra

Tartalom

1. Motiváció: miért pont véletlen gráfok?
2. A klasszikus modell: Erdős-Rényi véletlen-gráf modell
 - definíció
 - jellemzői (legnagyobb komponens mérete, összefüggőség, fokszámeloszlás)
3. Milyen jellemzőik vannak a valós hálózatoknak?
4. Jó (jónak tűnő) modellek a valós hálózatokra
 - (a) néhány inhomogén véletlen-gráf modell

Tartalom

1. Motiváció: miért pont véletlen gráfok?
2. A klasszikus modell: Erdős-Rényi véletlen-gráf modell
 - definíció
 - jellemzői (legnagyobb komponens mérete, összefüggőség, fokszámeloszlás)
3. Milyen jellemzőik vannak a valós hálózatoknak?
4. Jó (jónak tűnő) modellek a valós hálózatokra
 - (a) néhány inhomogén véletlen-gráf modell
 - (b) Barabási-Albert féle preferential attachment modell

Motiváció

Valós hálózatok vizsgálata fontos: web, kommunikációs hálózatok, szociális hálózatok, stb.

Motiváció

Valós hálózatok vizsgálata fontos: web, kommunikációs hálózatok, szociális hálózatok, stb.

Nehezen vizsgálhatók: túl nagyok, teljes leírás lehetetlen, nincs látható struktúra, globális viselkedést nem lehet jól leírni

Motiváció

Valós hálózatok vizsgálata fontos: web, kommunikációs hálózatok, szociális hálózatok, stb.

Nehezen vizsgálhatók: túl nagyok, teljes leírás lehetetlen, nincs látható struktúra, globális viselkedést nem lehet jól leírni



lokális vizsgálat: milyen szabály szerint, hogyan kapcsolódnak a csúcsok egymáshoz?

Motiváció

Valós hálózatok vizsgálata fontos: web, kommunikációs hálózatok, szociális hálózatok, stb.

Nehezen vizsgálhatók: túl nagyok, teljes leírás lehetetlen, nincs látható struktúra, globális viselkedést nem lehet jól leírni



lokális vizsgálat: milyen szabály szerint, hogyan kapcsolódnak a csúcsok egymáshoz?

⇒ **Véletlen gráfok**, mert a lokális szabályok nem lehetnek determinisztikusak

Motiváció

Valós hálózatok vizsgálata fontos: web, kommunikációs hálózatok, szociális hálózatok, stb.

Nehezen vizsgálhatók: túl nagyok, teljes leírás lehetetlen, nincs látható struktúra, globális viselkedést nem lehet jól leírni



lokális vizsgálat: milyen szabály szerint, hogyan kapcsolódnak a csúcsok egymáshoz?

⇒ **Véletlen gráfok**, mert a lokális szabályok nem lehetnek determinisztikusak

Kérdés: milyen véletlen-gráf modellt használjunk?

Klasszikus modell: Erdős-Rényi-modell

Klasszikus modell: Erdős-Rényi-modell

P. Erdős-A. Rényi: On the evolution of random graph, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5**: 17-61, (1960)

Klasszikus modell: Erdős-Rényi-modell

P. Erdős-A. Rényi: On the evolution of random graph, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5**: 17-61, (1960)

statikus, homogén modell

Klasszikus modell: Erdős-Rényi-modell

P. Erdős-A. Rényi: On the evolution of random graph, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5**: 17-61, (1960)

statikus, homogén modell

$ER_p(n)$:

- n csúcs

Klasszikus modell: Erdős-Rényi-modell

P. Erdős-A. Rényi: On the evolution of random graph, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5**: 17-61, (1960)

statikus, homogén modell

$ER_p(n)$:

- n csúcs
- az egyes élek p valószínűséggel vannak jelen a gráfban (egymástól függetlenül)

Klasszikus modell: Erdős-Rényi-modell

P. Erdős-A. Rényi: On the evolution of random graph, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*,**5**: 17-61, (1960)

statikus, homogén modell

$ER_p(n)$:

- n csúcs
- az egyes élek p valószínűséggel vannak jelen a gráfban (egymástól függetlenül)
 p gyakran $p = \lambda/n$

Klasszikus modell: Erdős-Rényi-modell

P. Erdős-A. Rényi: On the evolution of random graph, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5**: 17-61, (1960)

statikus, homogén modell

$ER_p(n)$:

- n csúcs
- az egyes élek p valószínűséggel vannak jelen a gráfban (egymástól függetlenül)
 p gyakran $p = \lambda/n$

(E. N. Gilbert: Random graphs, *Ann. Math. Statist.*, **30**: 1141-1144 (1959))

Kitérő: Erdős és Rényi eredeti modellje

$ER(n, M)$: n csúcsú, M élű véletlen gráfok közül egy, egyenletes eloszlás szerint választva

Kitérő: Erdős és Rényi eredeti modellje

$ER(n, M)$: n csúcsú, M élű véletlen gráfok közül egy, egyenletes eloszlás szerint választva

Eredmények eredetileg $ER(n, M)$ -re, de innen:

$$P_p(E) = \sum_{M=0}^{n(n-1)/2} P_M(E) \cdot \binom{\binom{n}{2}}{M} p^M (1-p)^{\binom{n}{2}-M}$$

Kitérő: Erdős és Rényi eredeti modellje

$ER(n, M)$: n csúcsú, M élű véletlen gráfok közül egy, egyenletes eloszlás szerint választva

Eredmények eredetileg $ER(n, M)$ -re, de innen:

$$P_p(E) = \sum_{M=0}^{n(n-1)/2} P_M(E) \cdot \binom{\binom{n}{2}}{M} p^M (1-p)^{\binom{n}{2}-M}$$

mivel az élszám eloszlása $ER_p(n)$ -ben $\binom{n}{2}$ és p paraméterű binomiális eloszlás.

Kitérő: Erdős és Rényi eredeti modellje

$ER(n, M)$: n csúcsú, M élű véletlen gráfok közül egy, egyenletes eloszlás szerint választva

Eredmények eredetileg $ER(n, M)$ -re, de innen:

$$P_p(E) = \sum_{M=0}^{n(n-1)/2} P_M(E) \cdot \binom{\binom{n}{2}}{M} p^M (1-p)^{\binom{n}{2}-M}$$

mivel az élszám eloszlása $ER_p(n)$ -ben $\binom{n}{2}$ és p paraméterű binomiális eloszlás.

Lényeg: A két modellben kapott eredmények megfeleltethetők egymásnak, mostantól az $ER_p(n)$ -nál maradunk.

p megválasztása

p megválasztása

$ER_p(n)$ élszámának várható értéke $pn(n-1)/2$

p megválasztása

$ER_p(n)$ élszámának várható értéke $pn(n-1)/2$

Ritka gráfokat akarunk kapni

p megválasztása

$ER_p(n)$ élszámának várható értéke $pn(n-1)/2$

Ritka gráfokat akarunk kapni, ezért természetes választás $p = \lambda/n$, ekkor az élszám várhatóan $\lambda(n-1)/2 = \Theta(n)$

p megválasztása

$ER_p(n)$ élszámának várható értéke $pn(n-1)/2$

Ritka gráfokat akarunk kapni, ezért természetes választás $p = \lambda/n$, ekkor az élszám várhatóan $\lambda(n-1)/2 = \Theta(n)$

További lehetőség p -re: $p(n)$ függvényként, ahol $p(n) \cdot n$ tart c -hez.

p megválasztása

$ER_p(n)$ élszámának várható értéke $pn(n-1)/2$

Ritka gráfokat akarunk kapni, ezért természetes választás $p = \lambda/n$, ekkor az élszám várhatóan $\lambda(n-1)/2 = \Theta(n)$

További lehetőség p -re: $p(n)$ függvényként, ahol $p(n) \cdot n$ tart c -hez. (Ennek spec. esete a $p = \lambda/n$, ekkor $p(n) \cdot n \equiv \lambda$, azaz $c = \lambda$.)

p megválasztása

$ER_p(n)$ élszámának várható értéke $pn(n-1)/2$

Ritka gráfokat akarunk kapni, ezért természetes választás $p = \lambda/n$, ekkor az élszám várhatóan $\lambda(n-1)/2 = \Theta(n)$

További lehetőség p -re: $p(n)$ függvényként, ahol $p(n) \cdot n$ tart c -hez. (Ennek spec. esete a $p = \lambda/n$, ekkor $p(n) \cdot n \equiv \lambda$, azaz $c = \lambda$.)

Kérdések: mi történik a gráfban λ értékétől (az általános $p(n)$ függvénytől, ill. c -től) függően?

p megválasztása

$ER_p(n)$ élszámának várható értéke $pn(n-1)/2$

Ritka gráfokat akarunk kapni, ezért természetes választás $p = \lambda/n$, ekkor az élszám várhatóan $\lambda(n-1)/2 = \Theta(n)$

További lehetőség p -re: $p(n)$ függvényként, ahol $p(n) \cdot n$ tart c -hez. (Ennek spec. esete a $p = \lambda/n$, ekkor $p(n) \cdot n \equiv \lambda$, azaz $c = \lambda$.)

Kérdések: mi történik a gráfban λ értékétől (az általános $p(n)$ függvénytől, ill. c -től) függően?

Válaszok: mindig olyasmi, hogy adott paraméter-érték mellett nagy valószínűséggel igaz vmi, azaz egy adott esemény valószínűsége tart 1-hez, ha $n \rightarrow \infty$.

Fázisátmenet $p = \lambda/n$ eset

Leghíresebb eredmény az ER modellel kapcsolatban:

Fázisátmenet $p = \lambda/n$ eset

Leghíresebb eredmény az ER modellel kapcsolatban: a maximális komponens méretéről szól

Fázisátmenet $p = \lambda/n$ eset

Leghíresebb eredmény az ER modellel kapcsolatban: a maximális komponens méretéről szól

- $\lambda < 1$: sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens
- $\lambda = 1$: a max. komponens csúcsszáma $\Theta(n^{2/3})$
- $\lambda > 1$: egy $\Theta(n)$ méretű és sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens

Fázisátmenet $p = \lambda/n$ eset

Leghíresebb eredmény az ER modellel kapcsolatban: a maximális komponens méretéről szól

- $\lambda < 1$: sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens
- $\lambda = 1$: a max. komponens csúcsszáma $\Theta(n^{2/3})$
- $\lambda > 1$: egy $\Theta(n)$ méretű és sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens

Megjegyzés: már kicsi n -ekre is nagy valószínűséggel megtörténik az óriás-komponens kialakulása

A bizonyítás elve

Vegyünk egy $ER_p(n)$ véletlen gráfot és abban egy v csúcsot, becsüljük meg, hogy mekkora lesz az a komponens, amiben v benne van

A bizonyítás elve

Vegyünk egy $ER_p(n)$ véletlen gráfot és abban egy v csúcsot, becsüljük meg, hogy mekkora lesz az a komponens, amiben v benne van

Jelölés: $C(v) =$ a v csúcs komponense

A bizonyítás elve

Vegyünk egy $ER_p(n)$ véletlen gráfot és abban egy v csúcsot, becsüljük meg, hogy mekkora lesz az a komponens, amiben v benne van

Jelölés: $C(v)$ = a v csúcs komponense

Kellene $|C_{max}| = \max_{v \in \{1,2,\dots,n\}} |C(v)|$

A bizonyítás elve

Vegyünk egy $ER_p(n)$ véletlen gráfot és abban egy v csúcsot, becsüljük meg, hogy mekkora lesz az a komponens, amiben v benne van

Jelölés: $C(v)$ = a v csúcs komponense

Kellene $|C_{max}| = \max_{v \in \{1,2,\dots,n\}} |C(v)|$

Nézzük egyesével ezeket a $C(v)$ -ket, kezdjük pl. az 1 csúcs komponensével

A bizonyítás elve

Vegyünk egy $ER_p(n)$ véletlen gráfot és abban egy v csúcsot, becsüljük meg, hogy mekkora lesz az a komponens, amiben v benne van

Jelölés: $C(v)$ = a v csúcs komponense

Kellene $|C_{max}| = \max_{v \in \{1,2,\dots,n\}} |C(v)|$

Nézzük egyesével ezeket a $C(v)$ -ket, kezdjük pl. az 1 csúcs komponensével

Képzeletben járjuk be ezt szélességi bejárással:

X_1 = az 1 távolságra levő csúcsok száma, azaz 1 közvetlen szomszédainak száma

A bizonyítás elve

Vegyünk egy $ER_p(n)$ véletlen gráfot és abban egy v csúcsot, becsüljük meg, hogy mekkora lesz az a komponens, amiben v benne van

Jelölés: $C(v)$ = a v csúcs komponense

Kellene $|C_{max}| = \max_{v \in \{1,2,\dots,n\}} |C(v)|$

Nézzük egyesével ezeket a $C(v)$ -ket, kezdjük pl. az 1 csúcs komponensével

Képzeletben járjuk be ezt szélességi bejárással:

X_1 = az 1 távolságra levő csúcsok száma, azaz 1 közvetlen szomszédainak száma

Ez $n - 1$ és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, azaz

$$P(X_1 = k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1-k)}$$

Bizonyításvázlat/2

Jelölés: $X_1 \sim \text{BIN}(n - 1, p)$

Bizonyításvázlat/2

Jelölés: $X_1 \sim \text{BIN}(n - 1, p)$

Jelölje az 1 csúcs közvetlen szomszédait $i_1 < i_2 < \dots < i_{X_1}$ és nézzük most i_1 új szomszédait, ezeknek száma legyen X_2 .

Bizonyításvázlat/2

Jelölés: $X_1 \sim \text{BIN}(n - 1, p)$

Jelölje az 1 csúcs közvetlen szomszédait $i_1 < i_2 < \dots < i_{X_1}$ és nézzük most i_1 új szomszédait, ezeknek száma legyen X_2 .

X_1 értékét rögzítve, i_1 új szomszédainak száma, X_2 , eloszlása ismét binomiális, de most a paraméterek $n - 1 - X_1$ és p , azaz $X_2 \sim \text{BIN}(n - 1 - X_1, p)$

Bizonyításvázlat/2

Jelölés: $X_1 \sim \text{BIN}(n - 1, p)$

Jelölje az 1 csúcs közvetlen szomszédait $i_1 < i_2 < \dots < i_{X_1}$ és nézzük most i_1 új szomszédait, ezeknek száma legyen X_2 .

X_1 értékét rögzítve, i_1 új szomszédainak száma, X_2 , eloszlása ismét binomiális, de most a paraméterek $n - 1 - X_1$ és p , azaz $X_2 \sim \text{BIN}(n - 1 - X_1, p)$

Általában: ha $C(1)$ $i + 1$. csúcsának az új szomszédait nézzük, akkor ezek számának feltételes eloszlása a korábbi X_i -ket adottnak véve $X_{i+1} \sim \text{BIN}(n - 1 - X_1 - X_2 - \dots - X_i, p)$

Bizonyításvázlat/3

Mikor áll le a komponens bejárása?

Bizonyításvázlat/3

Mikor áll le a komponens bejárása?

Ha már nincs olyan csúcs $C(1)$ -ben, aminek a szomszédait ne vizsgáltuk volna.

Bizonyításvázlat/3

Mikor áll le a komponens bejárása?

Ha már nincs olyan csúcs $C(1)$ -ben, aminek a szomszédait ne vizsgáltuk volna.

Az i . csúcs vizsgálata után a még nem vizsgált $C(1)$ -beli csúcsok száma $1 + X_1 + X_2 + \dots + X_i - i$,

Bizonyításvázlat/3

Mikor áll le a komponens bejárása?

Ha már nincs olyan csúcs $C(1)$ -ben, aminek a szomszédait ne vizsgáltuk volna.

Az i . csúcs vizsgálata után a még nem vizsgált $C(1)$ -beli csúcsok száma $1 + X_1 + X_2 + \dots + X_i - i$, azaz ez az eljárás leáll, ha

$$1 + X_1 + X_2 + \dots + X_i - i = 0.$$

Bizonyításvázlat/3

Mikor áll le a komponens bejárása?

Ha már nincs olyan csúcs $C(1)$ -ben, aminek a szomszédait ne vizsgáltuk volna.

Az i . csúcs vizsgálata után a még nem vizsgált $C(1)$ -beli csúcsok száma $1 + X_1 + X_2 + \dots + X_i - i$, azaz ez az eljárás leáll, ha

$$1 + X_1 + X_2 + \dots + X_i - i = 0.$$

Tehát $|C(1)| = \min\{i : X_1 + X_2 + \dots + X_i = i - 1\}$

Bizonyításvázlat/4

Keressük tehát

$$|C(1)| = \min\{i : X_1 + X_2 + \cdots + X_i = i - 1\}\text{-et.}$$

Bizonyításvázlat/4

Keressük tehát

$$|C(1)| = \min\{i : X_1 + X_2 + \cdots + X_i = i - 1\}\text{-et.}$$

Baj: X_i -k nehezen kezelhetők, nem is függetlenek

Bizonyításvázlat/4

Keressük tehát

$$|C(1)| = \min\{i : X_1 + X_2 + \cdots + X_i = i - 1\}\text{-et.}$$

Baj: X_i -k nehezen kezelhetők, nem is függetlenek

Nade: nagy n -re $BIN(n, \lambda/n)$ közel van a λ paraméterű Poisson-eloszláshoz, azaz

Bizonyításvázlat/4

Keressük tehát

$$|C(1)| = \min\{i : X_1 + X_2 + \cdots + X_i = i - 1\}\text{-et.}$$

Baj: X_i -k nehezen kezelhetők, nem is függetlenek

Nade: nagy n -re $BIN(n, \lambda/n)$ közel van a λ paraméterű Poisson-eloszláshoz, azaz

$$P(BIN(n, \lambda/n) = k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Bizonyításvázlat/4

Keressük tehát

$$|C(1)| = \min\{i : X_1 + X_2 + \cdots + X_i = i - 1\}\text{-et.}$$

Baj: X_i -k nehezen kezelhetők, nem is függetlenek

Nade: nagy n -re $BIN(n, \lambda/n)$ közel van a λ paraméterű Poisson-eloszláshoz, azaz

$$P(BIN(n, \lambda/n) = k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Ha tehát a binomiális eloszlású X_i -k helyett független, azonos, Poisson-eloszlású X_i^* -okra gondolunk, akkor

$$|C(1)| = \min\{i : X_1^* + X_2^* + \cdots + X_i^* = i - 1\}$$

Bizonyításvázlat/5

Kellene $|C(1)| = \min\{i : 1 + X_1^* + X_2^* + \cdots + X_i^* = i\}$, ahol X_i^* -ok független, azonos, Poisson-eloszlásúak.

Bizonyításvázlat/5

Kellene $|C(1)| = \min\{i : 1 + X_1^* + X_2^* + \cdots + X_i^* = i\}$, ahol X_i^* -ok független, azonos, Poisson-eloszlásúak.

Ez viszont olyan, mint egy branching process, Poisson-eloszlás-számnyi leszármazottal:

Bizonyításvázlat/5

Kellene $|C(1)| = \min\{i : 1 + X_1^* + X_2^* + \dots + X_i^* = i\}$, ahol X_i^* -ok független, azonos, Poisson-eloszlásúak.

Ez viszont olyan, mint egy branching process, Poisson-eloszlás-számnyi leszarmazottal:

kezdetben adott egy csúcs (1), gyerekeinek száma (X_1^*) λ -paraméterű Poisson-eloszlást követ, majd minden leszarmazott csúcsra ugyanez igaz.

Bizonyításvázlat/5

Kellene $|C(1)| = \min\{i : 1 + X_1^* + X_2^* + \dots + X_i^* = i\}$, ahol X_i^* -ok független, azonos, Poisson-eloszlásúak.

Ez viszont olyan, mint egy branching process, Poisson-eloszlás-számnyi leszarmazottal:

kezdetben adott egy csúcs (1), gyerekeinek száma (X_1^*) λ -paraméterű Poisson-eloszlást követ, majd minden leszarmazott csúcsra ugyanez igaz.

$1 + X_1^* + X_2^* + \dots + X_i^* = i$ azt jelenti, hogy a populáció első i tagjának összes leszarmazottjainak (beleértve az őst is) halmaza megegyezik a populáció első i tagjának halmazával, azaz a populáció az i . tagnál kihal.

Bizonyításvázlat/5

Kellene $|C(1)| = \min\{i : 1 + X_1^* + X_2^* + \dots + X_i^* = i\}$, ahol X_i^* -ok független, azonos, Poisson-eloszlásúak.

Ez viszont olyan, mint egy branching process, Poisson-eloszlás-számnyi leszarmazottal:

kezdetben adott egy csúcs (1), gyerekeinek száma (X_1^*) λ -paraméterű Poisson-eloszlást követ, majd minden leszarmazott csúcsra ugyanez igaz.

$1 + X_1^* + X_2^* + \dots + X_i^* = i$ azt jelenti, hogy a populáció első i tagjának összes leszarmazottjainak (beleértve az őst is) halmaza megegyezik a populáció első i tagjának halmazával, azaz a populáció az i . tagnál kihal.

Mikor történik ez?

Ez sokat tanulmányozott dolog, itt ismert jelenség vmi fázisátmenet-szerű dolog:

Ez sokat tanulmányozott dolog, itt ismert jelenség vmi fázisátmenet-szerű dolog:

A gyerekek számának várható értékétől, λ -tól függően:

Ez sokat tanulmányozott dolog, itt ismert jelenség vmi fázisátmenet-szerű dolog:

A gyerekek számának várható értékétől, λ -tól függően:

- $\lambda \leq 1$: 1 vgel kihal a populáció
- $\lambda > 1$: pozitív vgel örökké él

Ez sokat tanulmányozott dolog, itt ismert jelenség vmi fázisátmenet-szerű dolog:

A gyerekek számának várható értékétől, λ -tól függően:

- $\lambda \leq 1$: 1 vgel kihal a populáció
- $\lambda > 1$: pozitív vgel örökké él

Innen ered az $ER_{\lambda/n}(n)$ -modell fázisátmenetének magyarázata:

- $\lambda < 1$: sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens
- $\lambda = 1$: a max. komponens csúcsszáma $\Theta(n^{2/3})$
- $\lambda > 1$: egy $\Theta(n)$ méretű és sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens

Az *ER* modell további tulajdonságai

Az ER modell további tulajdonságai

1. Fázisátmenet, ha $p(n)$ nem feltétlenül λ/n alakú, de $p(n) \cdot n$ tart vmi c konstanshoz:

Az ER modell további tulajdonságai

1. Fázisátmenet, ha $p(n)$ nem feltétlenül λ/n alakú, de $p(n) \cdot n$ tart vmi c konstanshoz:

- $c < 1$: sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens
- $c > 1$: egy $\Theta(n)$ méretű és sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens

Az ER modell további tulajdonságai

1. Fázisátmenet, ha $p(n)$ nem feltétlenül λ/n alakú, de $p(n) \cdot n$ tart vmi c konstanshoz:

- $c < 1$: sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens
- $c > 1$: egy $\Theta(n)$ méretű és sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens

$c = 1$ esetben részben nyitott:

Az ER modell további tulajdonságai

1. Fázisátmenet, ha $p(n)$ nem feltétlenül λ/n alakú, de $p(n) \cdot n$ tart vmi c konstanshoz:

- $c < 1$: sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens
- $c > 1$: egy $\Theta(n)$ méretű és sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens

$c = 1$ esetben részben nyitott: a max. komponens mérete a $p(n) \cdot n - 1$ nagyságrendjén múlik,

Az ER modell további tulajdonságai

1. Fázisátmenet, ha $p(n)$ nem feltétlenül λ/n alakú, de $p(n) \cdot n$ tart vmi c konstanshoz:

- $c < 1$: sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens
- $c > 1$: egy $\Theta(n)$ méretű és sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens

$c = 1$ esetben részben nyitott: a max. komponens mérete a $p(n) \cdot n - 1$ nagyságrendjén múlik, ismert, hogy mi van, ha ez a különbség nagyobb, mint $\log n \cdot n^{-1/3}$

Az ER modell további tulajdonságai

1. Fázisátmenet, ha $p(n)$ nem feltétlenül λ/n alakú, de $p(n) \cdot n$ tart vmi c konstanshoz:

- $c < 1$: sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens
- $c > 1$: egy $\Theta(n)$ méretű és sok $\Theta(\log n)$ méretű komponens

$c = 1$ esetben részben nyitott: a max. komponens mérete a $p(n) \cdot n - 1$ nagyságrendjén múlik, ismert, hogy mi van, ha ez a különbség nagyobb, mint $\log n \cdot n^{-1/3}$

Ekkor a max. komponens mérete pl. lehet $\Theta(n^{2/3} \log n)$ is.

Az ER modell további tulajdonságai/2

2. Mikor lesz összefüggő egy $ER_{\lambda/n}(n)$ gráf?

Az ER modell további tulajdonságai/2

2. Mikor lesz összefüggő egy $ER_{\lambda/n}(n)$ gráf?

Fix λ esetén nagy valószínűséggel nem összefüggő.

Az ER modell további tulajdonságai/2

2. Mikor lesz összefüggő egy $ER_{\lambda/n}(n)$ gráf?

Fix λ esetén nagy valószínűséggel nem összefüggő.

- $\lambda(n) - \log n \rightarrow \infty$ esetén nagy valószínűséggel összefüggő.
- $\lambda(n) - \log n \rightarrow -\infty$ esetén nagy valószínűséggel nem összefüggő.

Az ER modell további tulajdonságai/2

2. Mikor lesz összefüggő egy $ER_{\lambda/n}(n)$ gráf?

Fix λ esetén nagy valószínűséggel nem összefüggő.

- $\lambda(n) - \log n \rightarrow \infty$ esetén nagy valószínűséggel összefüggő.
- $\lambda(n) - \log n \rightarrow -\infty$ esetén nagy valószínűséggel nem összefüggő.

3. Fokszámeloszlás

Az ER modell további tulajdonságai/2

2. Mikor lesz összefüggő egy $ER_{\lambda/n}(n)$ gráf?

Fix λ esetén nagy valószínűséggel nem összefüggő.

- $\lambda(n) - \log n \rightarrow \infty$ esetén nagy valószínűséggel összefüggő.
- $\lambda(n) - \log n \rightarrow -\infty$ esetén nagy valószínűséggel nem összefüggő.

3. Fokszámeloszlás

Mindegyik csúcs fokszámeloszlása ugyanolyan

Az ER modell további tulajdonságai/2

2. Mikor lesz összefüggő egy $ER_{\lambda/n}(n)$ gráf?

Fix λ esetén nagy valószínűséggel nem összefüggő.

- $\lambda(n) - \log n \rightarrow \infty$ esetén nagy valószínűséggel összefüggő.
- $\lambda(n) - \log n \rightarrow -\infty$ esetén nagy valószínűséggel nem összefüggő.

3. Fokszámeloszlás

Mindegyik csúcs fokszámeloszlása ugyanolyan, $BIN(n-1, \lambda/n)$

Az ER modell további tulajdonságai/2

2. Mikor lesz összefüggő egy $ER_{\lambda/n}(n)$ gráf?

Fix λ esetén nagy valószínűséggel nem összefüggő.

- $\lambda(n) - \log n \rightarrow \infty$ esetén nagy valószínűséggel összefüggő.
- $\lambda(n) - \log n \rightarrow -\infty$ esetén nagy valószínűséggel nem összefüggő.

3. Fokszámeloszlás

Mindegyik csúcs fokszámeloszlása ugyanolyan, $BIN(n-1, \lambda/n)$, azaz határeloszlásban λ paraméterű Poisson;

Az ER modell további tulajdonságai/2

2. Mikor lesz összefüggő egy $ER_{\lambda/n}(n)$ gráf?

Fix λ esetén nagy valószínűséggel nem összefüggő.

- $\lambda(n) - \log n \rightarrow \infty$ esetén nagy valószínűséggel összefüggő.
- $\lambda(n) - \log n \rightarrow -\infty$ esetén nagy valószínűséggel nem összefüggő.

3. Fokszámeloszlás

Mindegyik csúcs fokszámeloszlása ugyanolyan, $BIN(n-1, \lambda/n)$, azaz határeloszlásban λ paraméterű Poisson; a tipikus fokszám megegyezik a várható értékkel, kicsi a szórás.

Az ER modell további tulajdonságai/2

2. Mikor lesz összefüggő egy $ER_{\lambda/n}(n)$ gráf?

Fix λ esetén nagy valószínűséggel nem összefüggő.

- $\lambda(n) - \log n \rightarrow \infty$ esetén nagy valószínűséggel összefüggő.
- $\lambda(n) - \log n \rightarrow -\infty$ esetén nagy valószínűséggel nem összefüggő.

3. Fokszámeloszlás

Mindegyik csúcs fokszámeloszlása ugyanolyan, $BIN(n-1, \lambda/n)$, azaz határeloszlásban λ paraméterű Poisson; a tipikus fokszám megegyezik a várható értékkel, kicsi a szórás.

Tehát: ez a modell nem lesz jó valós hálózatok leírására.

Milyenek a valós hálózatok?

Az világos, hogy nem olyanok, mint amilyenek az *ER*-modell gráfjai.

Milyenek a valós hálózatok?

Az világos, hogy nem olyanok, mint amilyenek az *ER*-modell gráfjai.

Sokáig nem sokat lehetett tudni róluk, mert túl nagyok, de ahogy nőtt a számolási kapacitás egyre több dolog derült ki.

Milyenek a valós hálózatok?

Az világos, hogy nem olyanok, mint amilyenek az ER -modell gráfjai.

Sokáig nem sokat lehetett tudni róluk, mert túl nagyok, de ahogy nőtt a számolási kapacitás egyre több dolog derült ki.

Lényeg: sok közös vonás van a különböző helyről származó hálózatokban (www, telekommunikációs hálózatok, neurális hálózatok, szociális hálózatok, stb.).

Milyenek a valós hálózatok?

Az világos, hogy nem olyanok, mint amilyenek az ER -modell gráfjai.

Sokáig nem sokat lehetett tudni róluk, mert túl nagyok, de ahogy nőtt a számolási kapacitás egyre több dolog derült ki.

Lényeg: sok közös vonás van a különböző helyről származó hálózatokban (www, telekommunikációs hálózatok, neurális hálózatok, szociális hálózatok, stb.).

Legfontosabb jellemzők:

Milyenek a valós hálózatok?

Az világos, hogy nem olyanok, mint amilyenek az *ER*-modell gráfjai.

Sokáig nem sokat lehetett tudni róluk, mert túl nagyok, de ahogy nőtt a számolási kapacitás egyre több dolog derült ki.

Lényeg: sok közös vonás van a különböző helyről származó hálózatokban (www, telekommunikációs hálózatok, neurális hálózatok, szociális hálózatok, stb.).

Legfontosabb jellemzők:

1. **Small world**: kicsi az átlagos távolság a csúcspárok között

Milyenek a valós hálózatok?

Az világos, hogy nem olyanok, mint amilyenek az *ER*-modell gráfjai.

Sokáig nem sokat lehetett tudni róluk, mert túl nagyok, de ahogy nőtt a számolási kapacitás egyre több dolog derült ki.

Lényeg: sok közös vonás van a különböző helyről származó hálózatokban (www, telekommunikációs hálózatok, neurális hálózatok, szociális hálózatok, stb.).

Legfontosabb jellemzők:

1. **Small world**: kicsi az átlagos távolság a csúcspárok között

(Ez sokszor magyarázható a hálózat jellegéből, de nem mindig.)

Milyenek a valós hálózatok?

2. **Skála-független fokszámeloszlás:** a k -ad fokú csúcsok aránya $k^{-\tau}$ -val arányos, azaz hatványeloszlás szerint csökkenik (persze $\tau > 1$)

Milyenek a valós hálózatok?

2. **Skála-független fokszámeloszlás:** a k -ad fokú csúcsok aránya $k^{-\tau}$ -val arányos, azaz hatványeloszlás szerint csökkenik (persze $\tau > 1$)

Azért hívják skála-függetlennek, mert ez a jelenség már kevés csúcs esetén is jelentkezik (azaz most "scale-free"= hatványeloszlás szerinti fokszámok)

Milyenek a valós hálózatok?

2. **Skála-független fokszámeloszlás:** a k -ad fokú csúcsok aránya $k^{-\tau}$ -val arányos, azaz hatványeloszlás szerint csökkenik (persze $\tau > 1$)

Azért hívják skála-függetlennek, mert ez a jelenség már kevés csúcs esetén is jelentkezik (azaz most "scale-free"= hatványeloszlás szerinti fokszámok)

Ábrázolás gyakran log-log skálán, mert ha $N_k =$ a k -ad fokú csúcsok arányára igaz, hogy

$$N_k = c \cdot k^{-\tau},$$

Milyenek a valós hálózatok?

2. **Skála-független fokszámeloszlás:** a k -ad fokú csúcsok aránya $k^{-\tau}$ -val arányos, azaz hatványeloszlás szerint csökkenik (persze $\tau > 1$)

Azért hívják skála-függetlennek, mert ez a jelenség már kevés csúcs esetén is jelentkezik (azaz most "scale-free"= hatványeloszlás szerinti fokszámok)

Ábrázolás gyakran log-log skálán, mert ha $N_k =$ a k -ad fokú csúcsok arányára igaz, hogy

$$N_k = c \cdot k^{-\tau}, \text{ akkor}$$

$$\log N_k = \log c - \tau \cdot \log k,$$

Milyenek a valós hálózatok?

2. **Skála-független fokszámeloszlás**: a k -ad fokú csúcsok aránya $k^{-\tau}$ -val arányos, azaz hatványeloszlás szerint csökkenik (persze $\tau > 1$)

Azért hívják skála-függetlennek, mert ez a jelenség már kevés csúcs esetén is jelentkezik (azaz most "scale-free"= hatványeloszlás szerinti fokszámok)

Ábrázolás gyakran log-log skálán, mert ha $N_k =$ a k -ad fokú csúcsok arányára igaz, hogy

$$N_k = c \cdot k^{-\tau}, \text{ akkor}$$

$$\log N_k = \log c - \tau \cdot \log k,$$

azaz az így kapott függvény lineáris és meredeksége éppen $-\tau$.

Milyenek a valós hálózatok?

2. **Skála-független fokszámeloszlás**: a k -ad fokú csúcsok aránya $k^{-\tau}$ -val arányos, azaz hatványeloszlás szerint csökkenik (persze $\tau > 1$)

Azért hívják skála-függetlennek, mert ez a jelenség már kevés csúcs esetén is jelentkezik (azaz most "scale-free"= hatványeloszlás szerinti fokszámok)

Ábrázolás gyakran log-log skálán, mert ha $N_k =$ a k -ad fokú csúcsok arányára igaz, hogy

$$N_k = c \cdot k^{-\tau}, \text{ akkor}$$

$$\log N_k = \log c - \tau \cdot \log k,$$

azaz az így kapott függvény lineáris és meredeksége éppen $-\tau$.

Kérdések:

Milyenek a valós hálózatok?

2. **Skála-független fokszámeloszlás**: a k -ad fokú csúcsok aránya $k^{-\tau}$ -val arányos, azaz hatványeloszlás szerint csökkenik (persze $\tau > 1$)

Azért hívják skála-függetlennek, mert ez a jelenség már kevés csúcs esetén is jelentkezik (azaz most "scale-free"= hatványeloszlás szerinti fokszámok)

Ábrázolás gyakran log-log skálán, mert ha $N_k =$ a k -ad fokú csúcsok arányára igaz, hogy

$$N_k = c \cdot k^{-\tau}, \text{ akkor}$$

$$\log N_k = \log c - \tau \cdot \log k,$$

azaz az így kapott függvény lineáris és meredeksége éppen $-\tau$.

Kérdések: 1. τ mekkora?

Milyenek a valós hálózatok?

2. **Skála-független fokszámeloszlás**: a k -ad fokú csúcsok aránya $k^{-\tau}$ -val arányos, azaz hatványeloszlás szerint csökkenik (persze $\tau > 1$)

Azért hívják skála-függetlennek, mert ez a jelenség már kevés csúcs esetén is jelentkezik (azaz most "scale-free"= hatványeloszlás szerinti fokszámok)

Ábrázolás gyakran log-log skálán, mert ha $N_k =$ a k -ad fokú csúcsok arányára igaz, hogy

$$N_k = c \cdot k^{-\tau}, \text{ akkor}$$

$$\log N_k = \log c - \tau \cdot \log k,$$

azaz az így kapott függvény lineáris és meredeksége éppen $-\tau$.

Kérdések: 1. τ mekkora? (2. És honnan jön ez a fokszámeloszlás?)

Példák valós hálózatokra

Példák valós hálózatokra

1. **Internet** (maga a vezetékhálózat): csúcsok az Autonomous System-ek, élek az ilyenek közti közvetlen vezetékek

Példák valós hálózatokra

1. **Internet** (maga a vezetékhalózat): csúcsok az Autonomous System-ek, élek az ilyenek közti közvetlen vezetékek
1. átlagos távolság (pl. hány AS-en megy keresztül egy email) kicsi (≈ 7) \rightarrow small-world

Példák valós hálózatokra

1. **Internet** (maga a vezetékhálózat): csúcsok az Autonomous System-ek, élek az ilyenek közti közvetlen vezetékek
1. átlagos távolság (pl. hány AS-en megy keresztül egy email) kicsi (≈ 7) \rightarrow small-world
2. power-law fokszámeloszlás, $\tau \approx 2.2$

Példák valós hálózatokra

1. **Internet** (maga a vezetékhálózat): csúcsok az Autonomous System-ek, élek az ilyenek közti közvetlen vezetékek
1. átlagos távolság (pl. hány AS-en megy keresztül egy email) kicsi (≈ 7) \rightarrow small-world
2. power-law fokszámeloszlás, $\tau \approx 2.2$

2. Szociális hálózatok ("six degrees of separation")

2. Szociális hálózatok ("six degrees of separation")

Milgram leveles kísérlete (1967): 6 a max. távolság két ember között az ismeretségi gráfban

2. Szociális hálózatok ("six degrees of separation")

Milgram leveles kísérlete (1967): 6 a max. távolság két ember között az ismeretségi gráfban

Ugyanez a kísérlet email-lel 2001-ben: átlagos út a célig 6 hosszú → small-world

2. Szociális hálózatok ("six degrees of separation")

Milgram leveles kísérlete (1967): 6 a max. távolság két ember között az ismeretségi gráfban

Ugyanez a kísérlet email-lel 2001-ben: átlagos út a célig 6 hosszú → small-world

Az ismeretségi gráf fokszámeloszlása:

2. Szociális hálózatok ("six degrees of separation")

Milgram leveles kísérlete (1967): 6 a max. távolság két ember között az ismeretségi gráfban

Ugyanez a kísérlet email-lel 2001-ben: átlagos út a célig 6 hosszú → small-world

Az ismeretségi gráf fokszámeloszlása: nehezen vizsgálható a teljes gráf,

2. Szociális hálózatok ("six degrees of separation")

Milgram leveles kísérlete (1967): 6 a max. távolság két ember között az ismeretségi gráfban

Ugyanez a kísérlet email-lel 2001-ben: átlagos út a célig 6 hosszú → small-world

Az ismeretségi gráf fokszámeloszlása: nehezen vizsgálható a teljes gráf, ehelyett email-gráf (ki kinek küld levelet) ill. iwiw, Facebook, stb. vizsgálata.

2. Szociális hálózatok ("six degrees of separation")

Milgram leveles kísérlete (1967): 6 a max. távolság két ember között az ismeretségi gráfban

Ugyanez a kísérlet email-lel 2001-ben: átlagos út a célig 6 hosszú → small-world

Az ismeretségi gráf fokszámeloszlása: nehezen vizsgálható a teljes gráf, ehelyett email-gráf (ki kinek küld levelet) ill. iwiw, Facebook, stb. vizsgálata.

Az látszik, hogy skála-független fokszámeloszlás, τ kérdéses, általában $\approx 1.8 - 2.5$

3. Színészes gráfok

Melyik színész melyik másik színészekkel játszott közös filmben?

3. Színészes gráfok

Melyik színész melyik másik színészekkel játszott közös filmben?

átlagos távolság 6 két színész között

3. Színészes gráfok

Melyik színész melyik másik színészekkel játszott közös filmben?

átlagos távolság 6 két színész között

fokszámeloszlás majdnem power-law: egy darabig $k^{-\tau}$, de a vége exponenciálisan cseng le,

3. Színészes gráfok

Melyik színész melyik másik színészekkel játszott közös filmben?

átlagos távolság 6 két színész között

fokszámeloszlás majdnem power-law: egy darabig $k^{-\tau}$, de a vége exponenciálisan cseng le, $\tau \approx 2.3$

3. Színészes gráfok

Melyik színész melyik másik színészekkel játszott közös filmben?

átlagos távolság 6 két színész között

fokszámeloszlás majdnem power-law: egy darabig $k^{-\tau}$, de a vége exponenciálisan cseng le, $\tau \approx 2.3$

Hasonlók igazak a társszerzős gráfokra is.

3. Színészes gráfok

Melyik színész melyik másik színészekkel játszott közös filmben?

átlagos távolság 6 két színész között

fokszámeloszlás majdnem power-law: egy darabig $k^{-\tau}$, de a vége exponenciálisan cseng le, $\tau \approx 2.3$

Hasonlók igazak a társszerzős gráfokra is.

4. WWW

Csúcsok a weboldalak, élek a linkek

3. Színészes gráfok

Melyik színész melyik másik színészekkel játszott közös filmben?

átlagos távolság 6 két színész között

fokszámeloszlás majdnem power-law: egy darabig $k^{-\tau}$, de a vége exponenciálisan cseng le, $\tau \approx 2.3$

Hasonlók igazak a társszerzős gráfokra is.

4. WWW

Csúcsok a weboldalak, élek a linkek

$$\tau_{in} \approx 2.1, \tau_{out} \approx 2.45,$$

3. Színészes gráfok

Melyik színész melyik másik színészekkel játszott közös filmben?

átlagos távolság 6 két színész között

fokszámeloszlás majdnem power-law: egy darabig $k^{-\tau}$, de a vége exponenciálisan cseng le, $\tau \approx 2.3$

Hasonlók igazak a társszerzős gráfokra is.

4. WWW

Csúcsok a weboldalak, élek a linkek

$$\tau_{in} \approx 2.1, \tau_{out} \approx 2.45,$$

(bár van olyan vélemény is, hogy itt nincs is power-law, az csak mérési hibaként jön ki)

3. Színészes gráfok

Melyik színész melyik másik színészekkel játszott közös filmben?

átlagos távolság 6 két színész között

fokszámeloszlás majdnem power-law: egy darabig $k^{-\tau}$, de a vége exponenciálisan cseng le, $\tau \approx 2.3$

Hasonlók igazak a társszerzős gráfokra is.

4. WWW

Csúcsok a weboldalak, élek a linkek

$$\tau_{in} \approx 2.1, \tau_{out} \approx 2.45,$$

(bár van olyan vélemény is, hogy itt nincs is power-law, az csak mérési hibaként jön ki)

átlagos távolság (irányítatlan eset) ≈ 7

A valós hálózatokra tehát igaz, hogy ..

1. Kicsi az átlagos távolság

A valós hálózatokra tehát igaz, hogy ..

1. Kicsi az átlagos távolság
2. Ritkák: élszám $\Theta(n)$

A valós hálózatokra tehát igaz, hogy ..

1. Kicsi az átlagos távolság
2. Ritkák: élszám $\Theta(n)$
3. Fokszámaik hatványeloszlás szerint

A valós hálózatokra tehát igaz, hogy ..

1. Kicsi az átlagos távolság
2. Ritkák: élszám $\Theta(n)$
3. Fokszámaik hatványeloszlás szerint

Tehát: olyan modell kell, ami ezeket a jellemzőket (főleg a hatványeloszlást) képes

A valós hálózatokra tehát igaz, hogy ..

1. Kicsi az átlagos távolság
2. Ritkák: élszám $\Theta(n)$
3. Fokszámaik hatványeloszlás szerint

Tehát: olyan modell kell, ami ezeket a jellemzőket (főleg a hatványeloszlást) képes

(a) reprodukálni \rightarrow statikus modell: fix csúcsszám

A valós hálózatokra tehát igaz, hogy ..

1. Kicsi az átlagos távolság
2. Ritkák: élszám $\Theta(n)$
3. Fokszámaik hatványeloszlás szerint

Tehát: olyan modell kell, ami ezeket a jellemzőket (főleg a hatványeloszlást) képes

(a) reprodukálni \rightarrow statikus modell: fix csúcsszám

(b) generálni, magyarázni \rightarrow dinamikus modell: növekvő csúcsszám

A valós hálózatokra tehát igaz, hogy ..

1. Kicsi az átlagos távolság
2. Ritkák: élszám $\Theta(n)$
3. Fokszámaik hatványeloszlás szerint

Tehát: olyan modell kell, ami ezeket a jellemzőket (főleg a hatványeloszlást) képes

(a) reprodukálni \rightarrow statikus modell: fix csúcsszám

(b) generálni, magyarázni \rightarrow dinamikus modell: növekvő csúcsszám

Először most a statikus modelleket nézzük meg.

Általánosított véletlen-gráf modell

Az ER modell homogén gráfokat eredményezett, mert minden egyes élnek uakkora volt a megjelenési valószínűsége

Általánosított véletlen-gráf modell

Az ER modell homogén gráfokat eredményezett, mert minden egyes élnek uakkora volt a megjelenési valószínűsége

Ehelyett: az élek egymástól függetlenül vannak jelen, de a valószínűségük a végpontjaikhoz rendelt súlyoktól függ

Általánosított véletlen-gráf modell

Az ER modell homogén gráfokat eredményezett, mert minden egyes élnek uakkora volt a megjelenési valószínűsége

Ehelyett: az élek egymástól függetlenül vannak jelen, de a valószínűségük a végpontjaikhoz rendelt súlyoktól függ,

a súlyok lehetnek állandóak vagy lehetnek maguk is változóak

Általánosított véletlen-gráf modell

Az ER modell homogén gráfokat eredményezett, mert minden egyes élnek uakkora volt a megjelenési valószínűsége

Ehelyett: az élek egymástól függetlenül vannak jelen, de a valószínűségük a végpontjaikhoz rendelt súlyoktól függ,

a súlyok lehetnek állandóak vagy lehetnek maguk is változók

Például: az ij él valószínűsége legyen $p_{ij} = \frac{w_i w_j}{l_n + w_i w_j}$, ahol $l_n = \sum_{i=1}^n w_i$

Általánosított véletlen-gráf modell

Az ER modell homogén gráfokat eredményezett, mert minden egyes élnek uakkora volt a megjelenési valószínűsége

Ehelyett: az élek egymástól függetlenül vannak jelen, de a valószínűségük a végpontjaikhoz rendelt súlyoktól függ,

a súlyok lehetnek állandóak vagy lehetnek maguk is változók

Például: az ij él valószínűsége legyen $p_{ij} = \frac{w_i w_j}{l_n + w_i w_j}$, ahol $l_n = \sum_{i=1}^n w_i \rightarrow$

$GRG_n(\mathbf{w})$ gráf, ha w_i fixek,

Általánosított véletlen-gráf modell

Az ER modell homogén gráfokat eredményezett, mert minden egyes élnek uakkora volt a megjelenési valószínűsége

Ehelyett: az élek egymástól függetlenül vannak jelen, de a valószínűségük a végpontjaikhoz rendelt súlyoktól függ,

a súlyok lehetnek állandóak vagy lehetnek maguk is változók

Például: az ij él valószínűsége legyen $p_{ij} = \frac{w_i w_j}{l_n + w_i w_j}$, ahol $l_n = \sum_{i=1}^n w_i \rightarrow$

$GRG_n(\mathbf{w})$ gráf, ha w_i fixek, illetve

az ij él valószínűsége legyen $p_{ij} = \frac{W_i W_j}{\mu n + W_i W_j}$, ahol W_i -k független, azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel

Általánosított véletlen-gráf modell

Az ER modell homogén gráfokat eredményezett, mert minden egyes élnek uakkora volt a megjelenési valószínűsége

Ehelyett: az élek egymástól függetlenül vannak jelen, de a valószínűségük a végpontjaikhoz rendelt súlyoktól függ,

a súlyok lehetnek állandóak vagy lehetnek maguk is változók

Például: az ij él valószínűsége legyen $p_{ij} = \frac{w_i w_j}{l_n + w_i w_j}$, ahol $l_n = \sum_{i=1}^n w_i \rightarrow$

$GRG_n(\mathbf{w})$ gráf, ha w_i fixek, illetve

az ij él valószínűsége legyen $p_{ij} = \frac{W_i W_j}{\mu n + W_i W_j}$, ahol W_i -k független, azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel $\rightarrow GRG_n(\mathbf{W})$ gráf

Általánosított véletlen-gráf modell

Ha $w_i \equiv \frac{n\lambda}{n-\lambda}$, akkor $p_{ij} = \lambda/n$

Általánosított véletlen-gráf modell

Ha $w_i \equiv \frac{n\lambda}{n-\lambda}$, akkor $p_{ij} = \lambda/n \rightarrow$ visszakaptuk az eredeti ER modellt

Általánosított véletlen-gráf modell

Ha $w_i \equiv \frac{n\lambda}{n-\lambda}$, akkor $p_{ij} = \lambda/n \rightarrow$ visszakaptuk az eredeti ER modellt

Ha a W_i független, azonos eloszlású valószínűségi változók hatványeloszlásúak

Általánosított véletlen-gráf modell

Ha $w_i \equiv \frac{n\lambda}{n-\lambda}$, akkor $p_{ij} = \lambda/n \rightarrow$ visszakaptuk az eredeti ER modellt

Ha a W_i független, azonos eloszlású valószínűségi változók hatványeloszlásúak a keletkező véletlen gráf fokszámeloszlása hatványeloszlás lesz

Általánosított véletlen-gráf modell

Ha $w_i \equiv \frac{n\lambda}{n-\lambda}$, akkor $p_{ij} = \lambda/n \rightarrow$ visszakaptuk az eredeti ER modellt

Ha a W_i független, azonos eloszlású valószínűségi változók hatványeloszlásúak a keletkező véletlen gráf fokszámeloszlása hatványeloszlás lesz

Mivel a gráf definíciója lényegében tartalmazza a hatványeloszlást, nem nagy szám, hogy ez kijött...

Konfigurációs modell

Konfigurációs modell

Szintén statikus modell,

Konfigurációs modell

Szintén statikus modell, (lényegében) tetszőleges rögzített fokszámeloszláshoz gyárt egy (nagyjából) megfelelő gráfot.

Konfigurációs modell

Szintén statikus modell, (lényegében) tetszőleges rögzített fokszámeloszláshoz gyárt egy (nagyjából) megfelelő gráfot.

A fokszámeloszlás itt is lehet fix vagy lehet valószínűségi változó által meghatározott.

Konfigurációs modell

Szintén statikus modell, (lényegében) tetszőleges rögzített fokszámeloszláshoz gyárt egy (nagyjából) megfelelő gráfot.

A fokszámeloszlás itt is lehet fix vagy lehet valószínűségi változó által meghatározott.

Minden csúcshoz hozzárendeljük a kívánatos fokszámot

Konfigurációs modell

Szintén statikus modell, (lényegében) tetszőleges rögzített fokszámeloszláshoz gyárt egy (nagyjából) megfelelő gráfot.

A fokszámeloszlás itt is lehet fix vagy lehet valószínűségi változó által meghatározott.

Minden csúcshoz hozzárendeljük a kívánatos fokszámot → képzeletben ráillesztünk fokszámnyi fél-élet

Konfigurációs modell

Szintén statikus modell, (lényegében) tetszőleges rögzített fokszámeloszláshoz gyárt egy (nagyjából) megfelelő gráfot.

A fokszámeloszlás itt is lehet fix vagy lehet valószínűségi változó által meghatározott.

Minden csúcshoz hozzárendeljük a kívánatos fokszámot → képzeletben ráillesztünk fokszámnyi fél-élet, majd a fél-éleket párosítjuk

Konfigurációs modell

Szintén statikus modell, (lényegében) tetszőleges rögzített fokszámeloszláshoz gyárt egy (nagyjából) megfelelő gráfot.

A fokszámeloszlás itt is lehet fix vagy lehet valószínűségi változó által meghatározott.

Minden csúcshoz hozzárendeljük a kívánatos fokszámot → képzeletben ráillesztünk fokszámnyi fél-élet, majd a fél-éleket párosítjuk

Ez persze nem feltétlenül lesz egyszerű gráf (pedig mi olyat szeretnénk)

Konfigurációs modell

Szintén statikus modell, (lényegében) tetszőleges rögzített fokszámeloszláshoz gyárt egy (nagyjából) megfelelő gráfot.

A fokszámeloszlás itt is lehet fix vagy lehet valószínűségi változó által meghatározott.

Minden csúcshoz hozzárendeljük a kívánatos fokszámot → képzeletben ráillesztünk fokszámnyi fél-élet, majd a fél-éleket párosítjuk

Ez persze nem feltétlenül lesz egyszerű gráf (pedig mi olyat szeretnénk) →

Kérdés: hogyan csináljunk egyszerű gráfokat?

Konfigurációs modellek

1. **módszer**: ha fix fokszámok vannak:

Konfigurációs modellek

1. módszer: ha fix foksámok vannak: töröljük a hurokéleket és a többszörös élekből csak egy maradjon

Konfigurációs modellek

1. módszer: ha fix foksámok vannak: töröljük a hurokéleket és a többszörös élekből csak egy maradjon → törlős konfigurációs modell

Konfigurációs modellek

1. módszer: ha fix foksámok vannak: töröljük a hurokéleket és a többszörös élekből csak egy maradjon → törlős konfigurációs modell

Belátható, hogy a törlés nem nagyon változtatja meg a foksámokat, a kapott gráf lényegében jó lesz.

Konfigurációs modellek

1. módszer: ha fix foksámok vannak: töröljük a hurokéleket és a többszörös élekből csak egy maradjon → törlős konfigurációs modell

Belátható, hogy a törlés nem nagyon változtatja meg a foksámokat, a kapott gráf lényegében jó lesz.

2. módszer: ha a foksámok független, azonos eloszlású valváltozókból jönnek:

Konfigurációs modellek

1. módszer: ha fix foksámok vannak: töröljük a hurokéleket és a többszörös élekből csak egy maradjon → törlős konfigurációs modell

Belátható, hogy a törlés nem nagyon változtatja meg a foksámokat, a kapott gráf lényegében jó lesz.

2. módszer: ha a foksámok független, azonos eloszlású valváltozókból jönnek:

belátható, hogy ha a foksámok nem túl nagyok, akkor pozitív valószínűséggel egyszerű gráfot kapunk

Konfigurációs modellek

1. módszer: ha fix fokszámok vannak: töröljük a hurokéleket és a többszörös élekből csak egy maradjon → törlős konfigurációs modell

Belátható, hogy a törlés nem nagyon változtatja meg a fokszámokat, a kapott gráf lényegében jó lesz.

2. módszer: ha a fokszámok független, azonos eloszlású valváltozókból jönnek:

belátható, hogy ha a fokszámok nem túl nagyok, akkor pozitív valószínűséggel egyszerű gráfot kapunk → ismételjük addig az eljárást, amíg egyszerű gráf jön ki

Konfigurációs modellek

1. módszer: ha fix fokszámok vannak: töröljük a hurokéleket és a többszörös élekből csak egy maradjon → törlős konfigurációs modell

Belátható, hogy a törlés nem nagyon változtatja meg a fokszámokat, a kapott gráf lényegében jó lesz.

2. módszer: ha a fokszámok független, azonos eloszlású valváltozókból jönnek:

belátható, hogy ha a fokszámok nem túl nagyok, akkor pozitív valószínűséggel egyszerű gráfot kapunk → ismételjük addig az eljárást, amíg egyszerű gráf jön ki → ismétléses konfigurációs modell

Konfigurációs modellek

1. módszer: ha fix fokszámok vannak: töröljük a hurokéleket és a többszörös élekből csak egy maradjon → törlős konfigurációs modell

Belátható, hogy a törlés nem nagyon változtatja meg a fokszámokat, a kapott gráf lényegében jó lesz.

2. módszer: ha a fokszámok független, azonos eloszlású valváltozókból jönnek:

belátható, hogy ha a fokszámok nem túl nagyok, akkor pozitív valószínűséggel egyszerű gráfot kapunk → ismételjük addig az eljárást, amíg egyszerű gráf jön ki → ismétléses konfigurációs modell

Ha azt írjuk elő, hogy a fokszámok hatványeloszlás szerint legyenek, akkor az így kapott véletlen gráf jó lesz, tudja a skála-függetlenséget.

Dinamikus modell

De ez megint olyan volt, hogy azért jött ki a power-law, mert esélye se volt nem-kijönni.

Dinamikus modell

De ez megint olyan volt, hogy azért jött ki a power-law, mert esélye se volt nem-kijönni. Nem magyarázza, hogy a valós hálózatokban miért jelenik meg a power-law mindig.

Dinamikus modell

De ez megint olyan volt, hogy azért jött ki a power-law, mert esélye se volt nem-kijönni. Nem magyarázza, hogy a valós hálózatokban miért jelenik meg a power-law mindig.

Az első olyan modell, ami magyaráz is: Barabási-Albert féle preferential attachment modell

Dinamikus modell

De ez megint olyan volt, hogy azért jött ki a power-law, mert esélye se volt nem-kijönni. Nem magyarázza, hogy a valós hálózatokban miért jelenik meg a power-law mindig.

Az első olyan modell, ami magyaráz is: Barabási-Albert féle preferential attachment modell

- csúcsonként növeszti a hálózatot leíró gráfot

Dinamikus modell

De ez megint olyan volt, hogy azért jött ki a power-law, mert esélye se volt nem-kijönni. Nem magyarázza, hogy a valós hálózatokban miért jelenik meg a power-law mindig.

Az első olyan modell, ami magyaráz is: Barabási-Albert féle preferential attachment modell

- csúcsonként növeszti a hálózatot leíró gráfot
- a motiváló heurisztikáról hihető, hogy a valós helyzetet írja le

Dinamikus modell

De ez megint olyan volt, hogy azért jött ki a power-law, mert esélye se volt nem-kijönni. Nem magyarázza, hogy a valós hálózatokban miért jelenik meg a power-law mindig.

Az első olyan modell, ami magyaráz is: Barabási-Albert féle preferential attachment modell

- csúcsonként növeszti a hálózatot leíró gráfot
- a motiváló heurisztikáról hihető, hogy a valós helyzetet írja le
- nem nyilvánvaló módon vezet power-law fokszámeloszláshoz

Dinamikus modell

De ez megint olyan volt, hogy azért jött ki a power-law, mert esélye se volt nem-kijönni. Nem magyarázza, hogy a valós hálózatokban miért jelenik meg a power-law mindig.

Az első olyan modell, ami magyaráz is: Barabási-Albert féle preferential attachment modell

- csúcsonként növeszti a hálózatot leíró gráfot
- a motiváló heurisztikáról hihető, hogy a valós helyzetet írja le
- nem nyilvánvaló módon vezet power-law fokszámeloszláshoz

Fizikusok definíciója, matematikusok szerint pontatlan, de precízzé tehető

Dinamikus modell

De ez megint olyan volt, hogy azért jött ki a power-law, mert esélye se volt nem-kijönni. Nem magyarázza, hogy a valós hálózatokban miért jelenik meg a power-law mindig.

Az első olyan modell, ami magyaráz is: Barabási-Albert féle preferential attachment modell

- csúcsonként növeszti a hálózatot leíró gráfot
- a motiváló heurisztikáról hihető, hogy a valós helyzetet írja le
- nem nyilvánvaló módon vezet power-law fokszámeloszláshoz

Fizikusok definíciója, matematikusok szerint pontatlan, de precízzé tehető

Barabási-Albert-féle preferential attachment modell

Barabási-Albert-féle preferential attachment modell

Egyre nagyobb csúcsszámú gráfot hoz létre

Barabási-Albert-féle preferential attachment modell

Egyre nagyobb csúcsszámú gráfot hoz létre

Motiváció: az új csúcsok nagyobb valószínűséggel kapcsolódnak a nagyobb fokszámú régiekhez

Barabási-Albert-féle preferential attachment modell

Egyre nagyobb csúcsszámú gráfot hoz létre

Motiváció: az új csúcsok nagyobb valószínűséggel kapcsolódnak a nagyobb fokszámú régiekhez

Ez hihető pl. a szociális hálózatoknál (valószínű, hogy egy új ember ismerősei inkább a szociálisan aktívak közül kerülnek ki)

Barabási-Albert-féle preferential attachment modell

Egyre nagyobb csúcsszámú gráfot hoz létre

Motiváció: az új csúcsok nagyobb valószínűséggel kapcsolódnak a nagyobb fokszámú régiekhez

Ez hihető pl. a szociális hálózatoknál (valószínű, hogy egy új ember ismerősei inkább a szociálisan aktívak közül kerülnek ki)

a színészes gráfban (egy kezdő színész valószínűleg sokat játszó színészekkel fog először szerepelni filmben)

Barabási-Albert-féle preferential attachment modell

Egyre nagyobb csúcsszámú gráfot hoz létre

Motiváció: az új csúcsok nagyobb valószínűséggel kapcsolódnak a nagyobb fokszámú régiekhez

Ez hihető pl. a szociális hálózatoknál (valószínű, hogy egy új ember ismerősei inkább a szociálisan aktívak közül kerülnek ki)

a színészes gráfban (egy kezdő színész valószínűleg sokat játszó színészekkel fog először szerepelni filmben)

www-nél: egy új oldal valószínűleg az ismertebb weboldalakra tartalmaz linket

Barabási-Albert-féle eredeti definíció

Kezdjük néhány (m_0) izolált csúccsal

Barabási-Albert-féle eredeti definíció

Kezdjük néhány (m_0) izolált csúccsal

minden lépésben egy új csúcsot veszünk be m éllel úgy, hogy ezek az élek mind régi csúcsokhoz vezetnek

Barabási-Albert-féle eredeti definíció

Kezdjünk néhány (m_0) izolált csúccsal

minden lépésben egy új csúcsot veszünk be m éllel úgy, hogy ezek az élek mind régi csúcsokhoz vezetnek

annak a valószínűsége, hogy az új csúcs egy régi x_i csúcsot választ egy élének végpontjául legyen $d(x_i) / \sum_j d(x_j)$.

Barabási-Albert-féle eredeti definíció

Kezdjünk néhány (m_0) izolált csúccsal

minden lépésben egy új csúcsot veszünk be m éllel úgy, hogy ezek az élek mind régi csúcsokhoz vezetnek

annak a valószínűsége, hogy az új csúcs egy régi x_i csúcsot választ egy élének végpontjául legyen $d(x_i) / \sum_j d(x_j)$.

Így tehát t lépés múlva lesz $m_0 + t$ csúcs és mt él.

Barabási-Albert-féle eredeti definíció

Kezdjünk néhány (m_0) izolált csúccsal

minden lépésben egy új csúcsot veszünk be m éllel úgy, hogy ezek az élek mind régi csúcsokhoz vezetnek

annak a valószínűsége, hogy az új csúcs egy régi x_i csúcsot választ egy élének végpontjául legyen $d(x_i) / \sum_j d(x_j)$.

Így tehát t lépés múlva lesz $m_0 + t$ csúcs és mt él.

Barabási-Albert: szimulációkkal kijön, hogy a fokszámeloszlás hatványeloszlás $\tau = 3$ -mal.

A definíció pontosítása

Az eredeti definíció több ponton nem is jó ill. nem elég precíz:

A definíció pontosítása

Az eredeti definíció több ponton nem is jó ill. nem elég precíz:

1. Mivel izolált pontokkal kezd, nem világos, hogy hogyan lesznek egyáltalán élek,

A definíció pontosítása

Az eredeti definíció több ponton nem is jó ill. nem elég precíz:

1. Mivel izolált pontokkal kezd, nem világos, hogy hogyan lesznek egyáltalán élek, hiszen egy új él behúzásának valószínűsége $d(x_i) / \sum_j d(x_j)$, azaz $\equiv 0$.

A definíció pontosságása

Az eredeti definíció több ponton nem is jó ill. nem elég precíz:

1. Mivel izolált pontokkal kezd, nem világos, hogy hogyan lesznek egyáltalán élek, hiszen egy új él behúzásának valószínűsége $d(x_i) / \sum_j d(x_j)$, azaz $\equiv 0$.

Megoldás: valami rögzített m_0 csúcsú, e_0 élű gráffal kezdünk

A definíció pontosítása

Az eredeti definíció több ponton nem is jó ill. nem elég precíz:

1. Mivel izolált pontokkal kezd, nem világos, hogy hogyan lesznek egyáltalán élek, hiszen egy új él behúzásának valószínűsége $d(x_i) / \sum_j d(x_j)$, azaz $\equiv 0$.

Megoldás: valami rögzített m_0 csúcsú, e_0 élű gráffal kezdünk

2. Ha egy új él valószínűsége $d(x_i) / \sum_j d(x_j)$, akkor az új csúccsal együtt behúzott élek számának várható értéke nem m , hanem 1.

A definíció pontosítása

Az eredeti definíció több ponton nem is jó ill. nem elég precíz:

1. Mivel izolált pontokkal kezd, nem világos, hogy hogyan lesznek egyáltalán élek, hiszen egy új él behúzásának valószínűsége $d(x_i) / \sum_j d(x_j)$, azaz $\equiv 0$.

Megoldás: valami rögzített m_0 csúcsú, e_0 élű gráffal kezdünk

2. Ha egy új él valószínűsége $d(x_i) / \sum_j d(x_j)$, akkor az új csúccsal együtt behúzott élek számának várható értéke nem m , hanem 1.

Megoldás: 1. az új él valószínűsége $m(d(x_i) / \sum_j d(x_j))$

A definíció pontosítása

Az eredeti definíció több ponton nem is jó ill. nem elég precíz:

1. Mivel izolált pontokkal kezd, nem világos, hogy hogyan lesznek egyáltalán élek, hiszen egy új él behúzásának valószínűsége $d(x_i) / \sum_j d(x_j)$, azaz $\equiv 0$.

Megoldás: valami rögzített m_0 csúcsú, e_0 élű gráffal kezdünk

2. Ha egy új él valószínűsége $d(x_i) / \sum_j d(x_j)$, akkor az új csúccsal együtt behúzott élek számának várható értéke nem m , hanem 1.

Megoldás: 1. az új él valószínűsége $m(d(x_i) / \sum_j d(x_j))$

2. definiáljuk a modellt $m = 1$ -re, majd ennek segítségével tetszőleges m -re.

A definíció pontosítása/2

3. Nem világos, hogy hogyan veszi be az m új élet az új csúccsal együtt:

A definíció pontosítása/2

3. Nem világos, hogy hogyan veszi be az m új élet az új csúccsal együtt:

Egyszerre?

A definíció pontosítása/2

3. Nem világos, hogy hogyan veszi be az m új élet az új csúccsal együtt:

Egyszerre?

A baj ekkor az, hogy az m új él eloszlása nincs egyértelműen meghatározva a $m(d(x_i) / \sum_j d(x_j))$ valószínűségek által:

A definíció pontosság/2

3. Nem világos, hogy hogyan veszi be az m új élet az új csúccsal együtt:

Egyszerre?

A baj ekkor az, hogy az m új él eloszlása nincs egyértelműen meghatározva a $m(d(x_i) / \sum_j d(x_j))$ valószínűségek által:

ha pl. egy 4-hosszú körhöz veszünk hozzá $m = 2$ -vel egy új csúcsot,

A definíció pontosság/2

3. Nem világos, hogy hogyan veszi be az m új élet az új csúccsal együtt:

Egyszerre?

A baj ekkor az, hogy az m új él eloszlása nincs egyértelműen meghatározva a $m(d(x_i) / \sum_j d(x_j))$ valószínűségek által:

ha pl. egy 4-hosszú körhöz veszünk hozzá $m = 2$ -vel egy új csúcsot,

akkor tetszőleges olyan "egyszerre két élet"-választás jó, ahol két szomszédos csúcsot $0 \leq \alpha \leq 1/4$, két nem-szomszédos csúcsot pedig $1/2 - 2\alpha$ valószínűséggel választunk,

A definíció pontosság/2

3. Nem világos, hogy hogyan veszi be az m új élet az új csúccsal együtt:

Egyszerre?

A baj ekkor az, hogy az m új él eloszlása nincs egyértelműen meghatározva a $m(d(x_i) / \sum_j d(x_j))$ valószínűségek által:

ha pl. egy 4-hosszú körhöz veszünk hozzá $m = 2$ -vel egy új csúcsot,

akkor tetszőleges olyan "egyszerre két élet"-választás jó, ahol két szomszédos csúcsot $0 \leq \alpha \leq 1/4$, két nem-szomszédos csúcsot pedig $1/2 - 2\alpha$ valószínűséggel választunk,

mert ilyenkor mindegyik csúcs valóban $m \cdot (d(x_i) / \sum_j d(x_j)) = 2 \cdot 2/8 = 1/2$

valószínűséggel választódik.

A definíció pontosítása/3

Vagy az élek egymás után, egyesével kerülnek be?

A definíció pontosítása/3

Vagy az élek egymás után, egyesével kerülnek be?

De ilyenkor melyik fokszám számít, az új csúcs megjelenése előtti vagy a már néhány új éllel növelt?

A definíció pontosítása/3

Vagy az élek egymás után, egyesével kerülnek be?

De ilyenkor melyik fokszám számít, az új csúcs megjelenése előtti vagy a már néhány új éllel növelt?

4. Lehetnek-e többszörös élek, hurokélek?

A definíció pontosítása/3

Vagy az élek egymás után, egyesével kerülnek be?

De ilyenkor melyik fokszám számít, az új csúcs megjelenése előtti vagy a már néhány új éllel növelt?

4. Lehetnek-e többszörös élek, hurokélek?

Lényeg: minden probléma megoldható, a definíció precízzé tehető

A definíció pontosítása/3

Vagy az élek egymás után, egyesével kerülnek be?

De ilyenkor melyik fokszám számít, az új csúcs megjelenése előtti vagy a már néhány új éllel növelt?

4. Lehetnek-e többszörös élek, hurokélek?

Lényeg: minden probléma megoldható, a definíció precízzé tehető és lényegében bárhogyan tesszük precízzé, igazolható a fokszámokra a hatványeloszlás.

Egy lehetséges precízzé tevés

Kezdetben 1 csúcs, egy hurokkel

Egy lehetséges precízzé tevés

Kezdetben 1 csúcs, egy hurokéllel

$m = 1$ -re a növekedés: az t . új csúcsnak, v_t -nek, egy új éle van,

Egy lehetséges precízzé tevés

Kezdetben 1 csúcs, egy hurokéllel

$m = 1$ -re a növekedés: az t . új csúcsnak, v_t -nek, egy új éle van, ennek másik végpontja $\frac{1}{2^{t-1}}$ valószínűséggel saját maga,

Egy lehetséges precízzé tevés

Kezdetben 1 csúcs, egy hurokéllel

$m = 1$ -re a növekedés: az t . új csúcsnak, v_t -nek, egy új éle van, ennek másik végpontja $\frac{1}{2^{t-1}}$ valószínűséggel saját maga, $\frac{d(v_j)}{2^{t-1}}$ valószínűséggel egy régebbi v_j csúcs

Egy lehetséges precízzé tevés

Kezdetben 1 csúcs, egy hurokkel

$m = 1$ -re a növekedés: az t . új csúcsnak, v_t -nek, egy új éle van, ennek másik végpontja $\frac{1}{2^{t-1}}$ valószínűséggel saját maga, $\frac{d(v_j)}{2^{t-1}}$ valószínűséggel egy régebbi v_j csúcs

$m \geq 2$ esetben: mt csúcsszámú gráfot hozunk létre a fenti módon, mintha $m = 1$ -es gráfot csinálnánk,

Egy lehetséges precízzé tevés

Kezdetben 1 csúcs, egy hurokéllel

$m = 1$ -re a növekedés: az t . új csúcsnak, v_t -nek, egy új éle van, ennek másik végpontja $\frac{1}{2^{t-1}}$ valószínűséggel saját maga, $\frac{d(v_j)}{2^{t-1}}$ valószínűséggel egy régebbi v_j csúcs

$m \geq 2$ esetben: mt csúcsszámú gráfot hozunk létre a fenti módon, mintha $m = 1$ -es gráfot csinálnánk, egyesével bevéve az csúcsokat, 1-1 éllel,

Egy lehetséges precízzé tevés

Kezdetben 1 csúcs, egy hurokéllel

$m = 1$ -re a növekedés: az t . új csúcsnak, v_t -nek, egy új éle van, ennek másik végpontja $\frac{1}{2^{t-1}}$ valószínűséggel saját maga, $\frac{d(v_j)}{2^{t-1}}$ valószínűséggel egy régebbi v_j csúcs

$m \geq 2$ esetben: mt csúcsszámú gráfot hozunk létre a fenti módon, mintha $m = 1$ -es gráfot csinálnánk, egyesével bevéve az csúcsokat, 1-1 éllel,

aztán m -esével összehúzzuk a csúcsokat

Egy lehetséges precízzé tevés

Kezdetben 1 csúcs, egy hurokéllel

$m = 1$ -re a növekedés: az t . új csúcsnak, v_t -nek, egy új éle van, ennek másik végpontja $\frac{1}{2^{t-1}}$ valószínűséggel saját maga, $\frac{d(v_j)}{2^{t-1}}$ valószínűséggel egy régebbi v_j csúcs

$m \geq 2$ esetben: mt csúcsszámú gráfot hozunk létre a fenti módon, mintha $m = 1$ -es gráfot csinálnánk, egyesével bevéve az csúcsokat, 1-1 éllel,

aztán m -esével összehúzzuk a csúcsokat

→ lesz t csúcs és mt él, ahogy kell

Egy lehetséges precízzé tevés

Kezdetben 1 csúcs, egy hurokéllel

$m = 1$ -re a növekedés: az t . új csúcsnak, v_t -nek, egy új éle van, ennek másik végpontja $\frac{1}{2^{t-1}}$ valószínűséggel saját maga, $\frac{d(v_j)}{2^{t-1}}$ valószínűséggel egy régebbi v_j csúcs

$m \geq 2$ esetben: mt csúcsszámú gráfot hozunk létre a fenti módon, mintha $m = 1$ -es gráfot csinálnánk, egyesével bevéve az csúcsokat, 1-1 éllel,

aztán m -esével összehúzzuk a csúcsokat

→ lesz t csúcs és mt él, ahogy kell

Ez olyasmi, mintha egyesével vennénk be az új éleket és közben minden él után frissítenénk a fokszámot.

Eredmények

Eredmények

Számos szimulációban kijön a hatványeloszlás

Eredmények

Számos szimulációban kijön a hatványeloszlás

Akárhogy tesszük precízzé a definíciót belátható a hatványeloszlás

Eredmények

Számos szimulációban kijön a hatványeloszlás

Akárhogy tesszük precízzé a definíciót belátható a hatványeloszlás

További paramétereket lehet bevezetni a modellben, lehet még általánosítani, így bármely $3 \geq \tau > 2$ kitevő kihozható

Eredmények

Számos szimulációban kijön a hatványeloszlás

Akárhogy tesszük precízzé a definíciót belátható a hatványeloszlás

További paramétereket lehet bevezetni a modellben, lehet még általánosítani, így bármely $3 \geq \tau > 2$ kitevő kihozható

$m = 1$ esetén a gráf kevés, nagy-méretű komponensből áll, a legnagyobb nagyságrendje $\Theta\left(\frac{t}{\log t}\right)$

Eredmények

Számos szimulációban kijön a hatványeloszlás

Akárhogy tesszük precízzé a definíciót belátható a hatványeloszlás

További paramétereket lehet bevezetni a modellben, lehet még általánosítani, így bármely $3 \geq \tau > 2$ kitevő kihozható

$m = 1$ esetén a gráf kevés, nagy-méretű komponensből áll, a legnagyobb nagyságrendje $\Theta\left(\frac{t}{\log t}\right)$

$m \geq 2$ esetén nagy valószínűséggel összefüggő lesz a kapott gráf

Eredmények

Számos szimulációban kijön a hatványeloszlás

Akárhogy tesszük precízzé a definíciót belátható a hatványeloszlás

További paramétereket lehet bevezetni a modellben, lehet még általánosítani, így bármely $3 \geq \tau > 2$ kitevő kihozható

$m = 1$ esetén a gráf kevés, nagy-méretű komponensből áll, a legnagyobb nagyságrendje $\Theta\left(\frac{t}{\log t}\right)$

$m \geq 2$ esetén nagy valószínűséggel összefüggő lesz a kapott gráf

$m = 1$ esetén a gráf átmérője nagy valószínűséggel $\Theta(\log t)$

Eredmények

Számos szimulációban kijön a hatványeloszlás

Akárhogy tesszük precízzé a definíciót belátható a hatványeloszlás

További paramétereket lehet bevezetni a modellben, lehet még általánosítani, így bármely $3 \geq \tau > 2$ kitevő kihozható

$m = 1$ esetén a gráf kevés, nagy-méretű komponensből áll, a legnagyobb nagyságrendje $\Theta\left(\frac{t}{\log t}\right)$

$m \geq 2$ esetén nagy valószínűséggel összefüggő lesz a kapott gráf

$m = 1$ esetén a gráf átmérője nagy valószínűséggel $\Theta(\log t)$

$m \geq 2$ esetén a gráf átmérője nagy valószínűséggel $\Theta\left(\frac{\log t}{\log \log t}\right)$

Irodalom

1. Remco van der Hofstad: Random Graphs and Complex Networks, *lectures notes for master courses*

<http://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCN2008.pdf>

Irodalom

1. Remco van der Hofstad: Random Graphs and Complex Networks, *lectures notes for master courses*

<http://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCN2008.pdf>

2. A.-L.-Barabási, R. Albert: Emergence of scaling in random networks. *Science*, **286**(5439), 509-512, (1999)

Irodalom

1. Remco van der Hofstad: Random Graphs and Complex Networks, *lectures notes for master courses*

<http://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCN2008.pdf>

2. A.-L.-Barabási, R. Albert: Emergence of scaling in random networks. *Science*, **286**(5439), 509-512, (1999)

3. B. Bollobás, O. Riordan, J. Spencer, G. Tusnády: The degree sequence of a scale-free random graph process. *Random Structures Algorithms*, **18**(3), 279-290, (2001)

5. B. Bollobás, O. Riordan: Random graphs and branching processes, *Handbook of Large-Scale Random Networks*, Bolyai Society Math. Studies, 18, Chapter 1 (2009?)