

**Bevezetés a számításelméletbe II.**  
**Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató**  
2025. május 5.

**Általános alapelvek.**

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek pusztán leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amely egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfőbb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozathoz nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Valaki rajzolt egy 8 csúcsú fát, majd felsorolta a csúcsainak a fokszámát, de egyet kifelejtett. Előfordulhat-e, hogy az alábbi számsorozatokot kapta?

a) 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4

b) 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4

\* \* \* \* \*

Egy 8 csúcsú fában a csúcsok fokszámának összege  $2 \cdot 7 = 14$  kell legyen, (0 pont)  
mert egyrészt a tanult tétel szerint egy ilyen fának 7 éle van, (1 pont)  
másrészt a tanultak szerint a csúcsok fokszámösszege minden gráfban az élszám kétszerese. (1 pont)  
Ebből azonnal látszik, hogy a b) kérdésre a válasz nemleges: (1 pont)  
a hiányzó fokszám a fa összefüggősége miatt nem lehet 0 (1 pont)  
és a megadott fokszámok összege 14, így a kifelejtettel együtt 14-nél nagyobb összeget kapnánk. (2 pont)  
Az a) feladatban ugyanez a számolás azt mutatja, hogy a kifelejtett fokszám 2 kell legyen (1 pont)  
és könnyű is mutatni olyan fát, amiben a csúcsok fokszámai megfelelőek: például egy 6 csúcsú út egyik 2 fokú csúcsáról „lelógatunk” két további élt, amiknek a másik végpontja 1 fokú lesz. (2 pont)  
Így az a) kérdésre a válasz: igen. (1 pont)

Az a) feladat hiánytalan megoldásához persze nem szükséges a hiányzó fokszám előzetes meghatározása: ha egy megoldó mutat (rajzol) egy megfelelő fát, az megkaphatja az a) feladatért járó 4 pontot. Ne vonjunk le pontot azért, ha hiányzik annak a definíció szerinti indoklása, hogy a mutatott gráf valóban fa (bár ez elvileg valóban része volna egy hiánytalan megoldásnak); ha viszont egy megoldó mégis kitér erre, az kaphat ezért 1 extra pontot akkor, ha ezzel a feladatért járó összpontszám nem haladja meg a 10-et. A b) kérdés esetében nem jár pont az olyan megoldási kísérletekért, amikben a megoldó (rajzban és/vagy szövegben) dokumentálja azt a folyamatot, ahogyan sikertelenül próbál rajzolni egy megfelelő fát – kivéve azt az esetet, ha a megoldásból kirajzolódik egy világos terv az összes szóba jövő eset lefedésére és ezeknek legalább a jelentős részét a megoldás meggyőzően ki is zárja.

2. A 20 csúcsú  $G$  egyszerű gráfban 4 csúcs foka 11, a többi 16 csúcs foka 10. Mutassuk meg, hogy  $G$ -ben létezik egy  $P$  és egy  $Q$  séta úgy, hogy  $G$  minden élét  $P$  és  $Q$  közül pontosan az egyik tartalmazza.

\* \* \* \* \*

Kössünk össze a 11 fokú csúcsok közül kettőt egy új  $e$  éllel (akkor is, ha azok esetleg már szomszédosak voltak), a kapott gráfot jelölje  $G'$ . (1 pont)

$G'$ -ben  $e$  végpontjai 12 fokúak lettek, így  $G'$ -ben kettő kivételével minden csúcs foka páros. (1 pont)

Mivel az eredeti  $G$  egyszerű gráf és benne minden pont foka legalább 10, ezért Dirac tétele miatt van benne Hamilton-kör. (1 pont)

Így  $G$  összefüggő és emiatt persze  $G'$  is az. (2 pont)

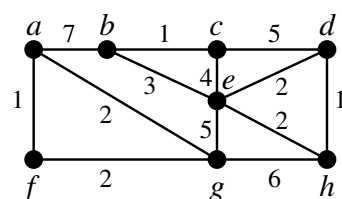
A fentiek miatt  $G'$ -ben van Euler-séta, mert teljesülnek rá a tanult tétel feltételei. (2 pont)

Ha most a  $G'$ -beli Euler-sétából töröljük az  $e$  élt, akkor éppen a feladat által kívánt  $P$  és  $Q$  séták maradnak meg belőle. (3 pont)

(Valóban: egyrészt  $P$  és  $Q$  nyilván séta, hiszen az Euler-séta is az volt; másrészt mivel az Euler-séta  $G'$  minden élét tartalmazta, ezért  $G$  minden éle  $P$  és  $Q$  közül pontosan az egyikbe kerül bele.) (0 pont)

$G$  összefüggősége indokolható máshogyan is – például úgy, hogy  $G$  minden komponense legalább 11 csúcsú kell legyen (mert egyszerű és minden pont foka legalább 10), így nem lehet 1-nél több komponense. Ha egy megoldó egyáltalán nem foglalkozik  $G'$  összefüggőségével, akkor ezért a fenti pontozás szerint  $1 + 2 = 3$  pontot veszít. Ha foglalkozik ezzel a kérdéssel, de az indoklása annyiban hiányos, hogy (kimondva vagy hallgatólagosan) feltételezi  $G'$  egyszerű voltát (és így például erre alkalmazza a Dirac-tételt), az ezért 1 pontot veszítsen az összefüggőségért járó 3 pontból.

3. Van-e olyan feszítőfa a jobbra látható élsúlyozott gráfban, amiben az élek összsúlya legfőljebb 14?



\* \* \* \* \*

A tanult Kruskal-algoritmust futtatjuk. (1 pont)

Ez először a három darab 1 súlyú élt veszi be (valamilyen sorrendben), mert ezek felvételekor sosem jön létre kör. (0 pont)

A soron következő 2 súlyú éleket az eljárás tetszőleges sorrendben vizsgálhatja, például:  $\{f, g\}$ ,  $\{e, h\}$ ,  $\{a, g\}$ ,  $\{d, e\}$ . Ekkor az első kettőről igennel kell döntenie, mert ezek felvétele nem hoz létre kört (vagyis a korábban felvett élek alkotta gráf különböző komponensei között futnak). (1 pont)

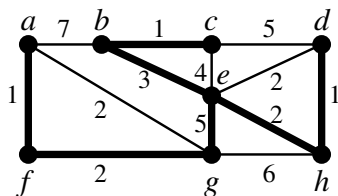
Viszont akkor az utolsó kettőről nemleges döntést kell hoznia, mert az  $a$  és  $g$ , valamint az  $e$  és  $d$  csúcsok is már közös komponensbe kerültek (vagyis kört hoznának létre). (1 pont)

Az eljárásnak most a 3 súlyú  $\{b, e\}$  élt kell vizsgálnia, amit bevesz a készülő feszítőfába (mert  $b$ -ből a korábban felvett élek mentén csak  $c$  érhető el). (1 pont)

A soron következő, 4 súlyú  $\{c, e\}$  élről nemleges döntést hoz, mert a végpontjai (a  $\{b, c\}$  és  $\{b, e\}$  élek mentén) már közös komponensben vannak. (1 pont)

Végül az eljárás az 5 súlyú élek közül (esetleg a  $\{c, d\}$  elutasítása után) az  $\{e, g\}$ -ről igennel dönt, mert a végpontjai nem elérhetők egymásból az eddig kiválasztott élek mentén. (1 pont)

Ezzel az algoritmus megáll, mert a kiválasztott élek száma elérte a 7-et, vagyis a csúcsok számánál eggyel kevesebbet. Így az algoritmus kimenete az ábrán látható, 15 összsúlyú feszítőfa. (1 pont)



Mivel a tanult tétel szerint a Kruskal-algoritmus minimális összsúlyú feszítőfát ad, (1 pont)

ezért nincs a gráfban 15-nél kisebb összsúlyú feszítőfa. Így a feladat kérdésére a válasz nemleges. (2 pont)

A pontozás szerinti első 1 pont akkor jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a megoldó a Kruskal-algoritmust szándékozik futtatni (akkor is, ha ezt nem nevezi meg). Bár az eljárás futását nem feltétlen szükséges a fentihez hasonló részletességű szöveggel dokumentálni a megfelelő részpontszámok megszerzéséhez, de a futtatásért járó összesen 6 pont megszerzéséhez világosan ki kell derülnie a megoldásból, hogy az algoritmus helyesen futott; így például hogy az éleket milyen sorrendben vizsgálta, az egyes élekről milyen döntést hozott és milyen szempont szerint, illetve hogy hogyan döntött az eljárás leállításáról. Így ha egy megoldó a futtatás dokumentálását teljesen mellőzi és csak az algoritmus kimenetét közli, akkor a megoldására legfőljebb a pontozás szerint megmaradó 4 pontot kaphatja meg.

4. A  $G$  páros gráfról tudjuk, hogy bárhogyan választunk ki  $G$  csúcsai közül 10-et,  $G$ -nek mindig van olyan éle, aminek egyik végpontja nincs a kiválasztottak között. Mutassuk meg, hogy  $G$  élei közül kiválasztható 11 darab úgy, hogy  $G$  minden csúcsára legföljebb egy illeszkedjen a kiválasztott élek közül.

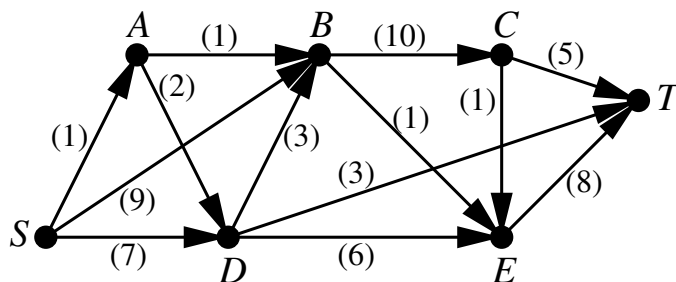
\* \* \* \* \*

A feladat első mondatában szereplő állítás azt jelenti, hogy  $G$ -ben a lefogó pontok minimális száma,  $\tau(G) \geq 11$ . Valóban,  $\tau(G) \leq 10$  éppen azt jelentené, hogy létezik  $G$ -ben 10 pontú lefogó ponthalmaz – vagyis 10 csúcs úgy, hogy  $G$  minden élének legalább az egyik végpontja ezek között van. (4 pont)

A második mondatban szereplő, bizonyítandó állítás pedig a független élhalmaz definíciója szerint azt jelenti, hogy a  $G$ -beli független élek maximális száma,  $\nu(G) \geq 11$ . (3 pont)

Így a bizonyítandó állítás következik König tételéből: mivel  $G$  páros gráf, ezért rá  $\nu(G) = \tau(G)$ , így a  $\tau(G) \geq 11$  feltételből valóban adódik, hogy  $\nu(G) \geq 11$ . (3 pont)

5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális értékű folyamot  $S$ -ből  $T$ -be és egy minimális kapacitású vágást.



\* \* \* \* \*

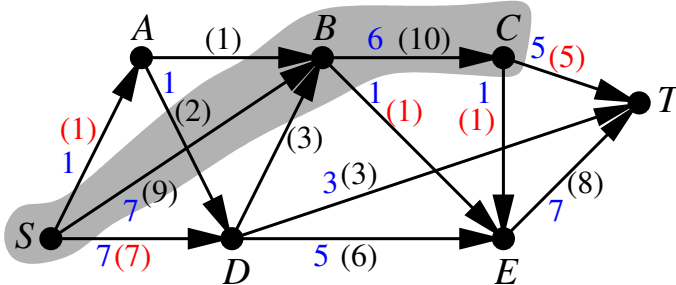
Az ábrán látható folyam értéke (az  $S$ -ből kilépő éleken a folyamértékek összege) 15. (2 pont)

Az  $\{S, B, C\}$  vágás kapacitása szintén 15 (az alábbi ábrán pirossal jelölt kapacitások összege). (3 pont)

Mivel a tanultak szerint minden folyam értéke legföljebb akkora, mint tetszőleges vágás kapacitása, (1 pont)

ezért a 15 kapacitású vágás bizonyítja, hogy a 15 értékű folyam maximális (2 pont)

és a 15 értékű folyam bizonyítja, hogy a 15 kapacitású vágás minimális. (2 pont)



Bár egy teljes értékű megoldásnak elvileg része volna annak definíció szerinti ellenőrzése is, hogy a megadott értékek valóban folyamot alkotnak, de ennek hiányáért nem vonunk le pontot. A fenti pontozás szerinti utolsó 5 pont annak jár, aki érdemben indokolja, hogy a megadott folyam maximális értékű és a megadott vágás minimális kapacitású. Ez történhet máshogyan is, mint a fenti megoldásban: például a javítóutas algoritmus futtatásával, hivatkozva arra a tanult tételre, hogy az eljárás leállása után kapott folyam maximális értékű, illetve ekkor a folyamhoz tartozó segédgráfban  $S$ -ből elérhető csúcsok alkotta vágás minimális kapacitású. Azonban üres frázisok (mint például: „a Ford-Fulkerson tétel miatt”) nem érnek pontot.

6\*. A hurokért nem tartalmazó  $G$  gráfban minden csúcs foka  $d$ , ahol  $d \geq 2$  egész. Tudjuk továbbá, hogy  $\chi_e(G) = d$  és  $G$  élei a színek „átnevezésétől” eltekintve csak egyféleképpen színezhetők meg helyesen  $d$  színnel. Mutassuk meg, hogy  $G$ -ben van Hamilton-kör. ( $\chi_e(G)$  a  $G$  gráf élkromatikus számát jelöli. A élszínezés átnevezésektől eltekintve egyértelmű voltáról szóló feltétel részletesebben azt jelenti, hogy  $G$  éleinek két,  $d$  színnel való élszínezését tekintve két tetszőleges él pontosan akkor ugyanolyan színű az egyik élszínezés szerint, ha a másik élszínezés szerint ugyanolyan színűek.)

\* \* \* \* \*

Vegyük  $G$  egy élszínezését  $d$  színnel és legyen a felhasznált színek közül kettő a piros és a kék. (0 pont)

Álljon  $G$ -nek a  $H$  részgráfja ( $G$ -nek az összes csúcsából és) azokból az éleiből, amik ebben az élszínezésben pirosak vagy kékek lettek. (1 pont)

Mivel minden csúcs foka  $d$  és az egy csúcsra illeszkedő éleknek különböző színűnek kell lenniük, ezért  $G$  minden csúcsára kell illeszkedni piros és kék élnek is. Így  $H$ -ban minden  $v$  csúcs foka 2 és a  $v$ -re illeszkedő két  $H$ -beli él közül az egyik piros, a másik kék. (1 pont)

Ebből következik, hogy  $H$  minden összefüggő komponense egy páros hosszúságú kör. (1 pont)

Valóban, tetszőleges  $v$  csúcsból elindulva és egy  $H$ -beli élsorozatot bejárva minden csúcsból csak egyetlen élen léphetünk tovább, mert a csúcsokra csak két él illeszkedik. Mivel a csúcsok száma véges, ezért véges sok lépés után visszaérkezünk  $v$ -be. Közben tehát egy  $C$  kört tettünk meg, amivel  $v$  komponensének minden csúcsát és élét kimerítettük. (1 pont)

Továbbá az így bejárt  $C$  kör nyilván páros, mert az élei felváltva pirosak és kékek. (1 pont)

Állítjuk, hogy  $H$ -nak csak egyetlen komponense van. Ha ezt belátjuk, akkor ezzel a fentiek szerint megmutatjuk egy Hamilton-kör létezését is (hiszen ezek szerint  $H$  egyetlen komponenséről kiderítjük, hogy az egy minden csúcsot tartalmazó kör). (1 pont)

Tegyük fel ezért indirekt, hogy  $H$ -nak legalább két komponense van, legyenek az egyik ezek közül  $K$  (ami ezek szerint egy páros hosszú kör). (0 pont)

Cseréljük most fel  $K$ -ban a piros és kék élek szerepét (vagyis fessünk át  $K$ -ban minden piros élt kékre és minden kék élt pirosra). (2 pont)

Ezzel továbbra is  $G$  egy helyes élszínezését kapjuk, hiszen továbbra is minden csúcsra egy piros és egy kék él illeszkedik (a többi színosztályhoz pedig nem nyúltunk). (1 pont)

Továbbá ez az élszínezés lényegesen különbözik az eredetitől (vagyis nem csak a színek „átnevezésében”), hiszen  $H$  többi komponensében a piros és kék élek az eredetiek maradtak. (1 pont)

Ez ellentmond a feladatban írt feltételnek, amivel tehát a bizonyítás teljes. (0 pont)

Egy teljes értékű megoldáshoz valójában nincs szükség annak megmutatására, hogy  $H$  minden komponense páros kör; elég annyit belátni, hogy  $H$  nem összefüggő. Ugyanis már ennyi információ birtokában is elmondhatjuk, hogy  $H$  egyik komponensében a piros és kék színű éleket felcserélve lényegesen különböző színezést kapunk. Ennek ellenére, a fenti pontozás szerinti részpontoszámok járnak akkor is, ha egy megoldó nem teljes megoldást ad, de a leírt megfigyelésekig eljut. Nem jár viszont részpontoszám annak a megemlékezésért, hogy a Hamilton-kör létezése következik a Dirac-tételből abban az esetben, ha  $d$  legalább a csúcsszám fele (és  $G$  egyszerű), mert ez a gondolat önmagában nem vezet egy helyes megoldás irányába.