Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2024. május 9.

1. A 14 csúcsú G egyszerű gráf egy 6 csúcsú útból és egy 8 csúcsú útból készült úgy, hogy az egyik út minden csúcsát összekötöttük a másik út minden csúcsával (egy-egy él mentén). Milyen hosszú G-ben egy lehető legrövidebb olyan élsorozat, ami G minden élét tartalmazza? (Az élsorozatban tehát G minden élének kell szerepelnie legalább egyszer, de egyes élei akár többször is szerepelhetnek.)

2. A G irányítatlan, egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. G-re lefuttattuk a BFS algoritmust az a csúcsból indítva és az egyes csúcsok előző(v) mutatóira az alábbiakat kaptuk:

v	:	a	b	c	d	e	f	g
előző(v)	:	$*$	a	a	b	c	c	f

a) Mennyi táv(g), vagyis a g csúcs távolsága a-tól?

b) Mennyi az a csúcs foka G-ben?

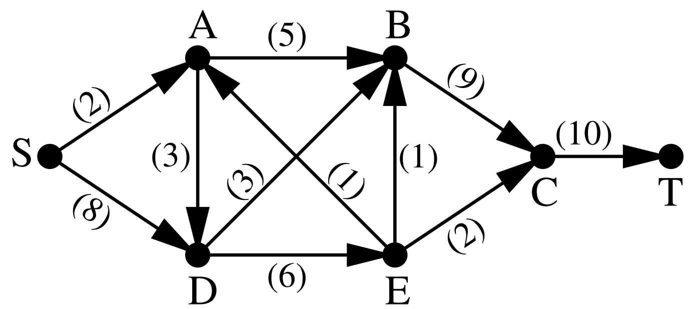
c) Mennyi a g csúcs foka G-ben, ha azt is tudjuk, hogy a BFS algoritmus a csúcsokat ábécé szerinti növekvő sorrendben járta be (vagyis a csúcsok ebben a sorrendben váltak aktív csúccsá)?

3. A 12 csúcsú G egyszerű gráf egy 5 csúcsú körből és egy 7 csúcsú körből készült úgy, hogy az egyik kör minden csúcsát összekötöttük a másik kör minden csúcsával (egy-egy él mentén). Határozzuk meg G-nek a $\chi(G)$ kromatikus számát és az $\omega(G)$ klikkszámát.

4. A (14 csúcsú és 21 élű) G gráf egy hétszög alapú hasáb élhálója; vagyis G csúcsai azonosak a hasáb csúcsaival és két csúcs akkor szomszédos G-ben (egyetlen él mentén), ha a hasáb egyik éle összeköti őket. Határozzuk meg G-nek a $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

5. a) Adjunk meg egy minimális kapacitású vágást a jobbra látható hálózatban (amiben S a termelő, T a fogyasztó).

b) Változtassuk most meg a C-ből T-be mutató él kapacitását 10-ről p-re, ahol p paraméter. Adjunk meg minden $p \geq 0$ értékre egy minimális kapacitású vágást a kapott hálózatban.



6*. Mutassuk meg, hogy $\chi(\overline{G}) \leq \varrho(G)$ teljesül minden izolált pontot nem tartalmazó G egyszerű gráfra. ($\chi(G)$ a G kromatikus számát, $\overline{G}$ a G komplementerét, $\varrho(G)$ pedig a G-beli lefogó élek minimális számát jelöli.)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe 2
pótzárthelyi feladatok
2024.05.28.

1. Hány 3 fokú csúcsa lehet egy olyan húsz csúcsú fának, aminek pontosan tíz 1 fokú és pontosan egy 10 fokú csúcsa van?

2. Legyenek egy egyszerű gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, két különböző csúcs pedig pontosan akkor legyen szomszédos, ha közülük a nagyobbik legalább kétszer akkora, mint a kisebbik. Döntsük el, hogy van-e a gráfnak Hamilton-köre.

3. A G egyszerű gráfnak 20 csúcsa és 101 éle van. Lehetséges-e, hogy G kromatikus száma
a) 2;
b) 3?

4. Egy páros gráf két pontosztálya $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Az a_i és b_j csúcsok közt pontosan akkor van él, ha a jobbra látható mátrix i. sorának j. eleme 1 (ahol $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 8$). Adjunk meg egy maximális párosítást és egy minimális lefogó ponthalmazt a gráfban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Egy tizenhat csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 3, a független élek maximális száma pedig 7. Határozzuk meg a gráf élkromatikus számát.

6*. Egy 102 csúcsú G egyszerű gráfnak minden komponense 3 vagy 4 csúcsú. A gráfot egy lépésben átalakíthatjuk úgy, hogy először elhagyunk 3 tetszőleges élet, majd hozzáveszünk 1 tetszőleges élet (miközben a csúcshalmaz nem változik). Mutassuk meg, hogy akárhányszor is hajtjuk végre ezt a lépést G-ből kiindulva, soha nem kapunk összefüggő gráfot.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, a pontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

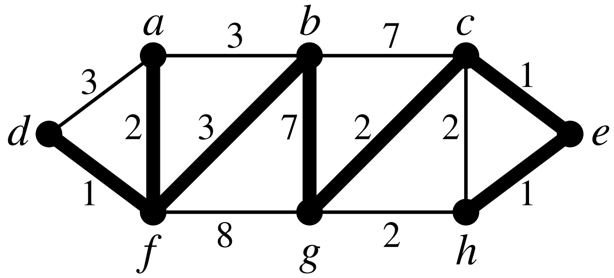
Bevezetés a számításelméletbe II.
Díjköteles pótlás feladatok
2024. június 5.

1. A 10 csúcsú G egyszerű gráfnak van olyan éle, amit G minden köre tartalmaz. Előfordulhat-e, hogy G éleinek a száma

a) 10; b) 11?

2. Igaz-e, hogy minden, Euler-körsétát nem tartalmazó G egyszerű, összefüggő gráfhoz hozzá lehet venni egy új csúcsot és azt össze lehet kötni G néhány csúcsával (egy-egy él mentén) úgy, hogy a kapott gráfban már legyen Euler-körséta?

3. Minimális összsúlyú feszítőfát alkotnak-e a megvastagított élek az alábbi ábrán látható élsúlyozott gráfban?



4. A G egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{10, 11, 12, \dots, 49\}$. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha nincs olyan számjegy, ami mindkét megfelelő számban szerepel. (Így például G-ben a 17 szomszédos 35-tel és 42-vel is, de nem szomszédos sem 13-mal, sem 27-tel, sem 41-gyel.) Határozzuk meg G-nek a $\chi(G)$ kromatikus számát.

5. Legyenek egy egyszerű gráf csúcsai az $1, 2, \dots, 100$ számok, két különböző csúcs pedig pontosan akkor legyen szomszédos, ha közülük a nagyobbik több, mint kétszerese a kisebbiknek. (Így például G-ben a 20 nem szomszédos sem a 15-tel, sem a 40-nel, de az 5-tel és az 50-nel igen.) Adjunk meg G-ben egy maximális független csúcshalmazt és egy minimális lefogó élhalmazt.

6*. A (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyam értéke s-ből t-be 10. Ha az e él kapacitását 1-gyel növeljük, az f él kapacitását viszont 1-gyel csökkentjük, akkor a maximális folyam értéke nem változik, marad 10. Előfordulhat-e, hogy ha az e él kapacitását 1-gyel csökkentjük és az f él kapacitását 1-gyel növeljük, akkor az így kapott hálózatban a maximális folyam értéke

a) 9; b) 10; c) 11?

(Feltételezhetjük, hogy eredetileg az e és az f él kapacitása is legalább 1 volt.)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2024. május 9.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. A 14 csúcsú G egyszerű gráf egy 6 csúcsú útból és egy 8 csúcsú útból készült úgy, hogy az egyik út minden csúcsát összekötöttük a másik út minden csúcsával (egy-egy él mentén). Milyen hosszú G-ben egy lehető legrövidebb olyan élsorozat, ami G minden élét tartalmazza? (Az élsorozatban tehát G minden élének kell szerepelnie legalább egyszer, de egyes élei akár többször is szerepelhetnek.)

* * * * *

Első megoldás. Jelölje P_6, illetve P_8 a G készítéséhez használt 6, illetve 8 csúcsú utat. (0 pont)
Ekkor P_6 végpontjainak a foka G-ben 9, P_6 többi csúcsának a foka viszont 10 (hiszen P_6 csúcsai a P_6-on belüli szomszédaikon kívül még szomszédosak P_8 mind a 8 csúcsával). Hasonlóan, P_8 végpontjainak a foka 7, P_8 többi csúcsának a foka pedig 8. (1 pont)
G éleinek a száma pedig 60 (amiből $5 + 7 = 12$ él P_6-hoz, illetve P_8-hoz tartozik, a többi $6 \cdot 8 = 48$ él pedig a két út csúcsait köti össze). (1 pont)
Mivel 2-nél több páratlan fokú csúcsa van, ezért a tanult tétel szerint G-ben nincs Euler-séta. (1 pont)
Ez azt jelenti, hogy G-ben nincs olyan 60 élű élsorozat, ami G minden élét tartalmazná; vagyis a legrövidebb ilyen élsorozat hossza legalább 61. (2 pont)
Jelölje u, illetve v P_6, illetve P_8 egyik végpontját és adjunk hozzá G-hez egy új $\{u, v\}$ élt. (Ezzel tehát u és v között már két párhuzamos él fut.) (1 pont)
A kapott G' gráfban u és v foka 1-gyel nőtt, így párosra változott. Vagyis G'-ben már két kivétellel minden csúcs foka páros. (1 pont)
Igaz továbbá az is, hogy G' összefüggő gráf. Valóban, ha két csúcs G'-ben nem szomszédos, akkor P_6 és P_8 közül ugyanahhoz kell tartozniuk, így nyilván vezet közöttük út (akár P_6 vagy P_8 mentén, akár a másik út egy tetszőleges csúcsán át). (1 pont)
Így a tanult tétel szerint G' tartalmaz Euler-sétát. (1 pont)
Következik, hogy G tartalmaz 61 hosszúságú olyan élsorozatot, ami G minden élét tartalmazza: ehhez a G'-beli Euler-sétát csak annyiban kell módosítani, hogy annak mindkét, u és v közötti élét a G-beli egyetlen $\{u, v\}$ élre kell cserélni. (1 pont)
Így a legrövidebb ilyen élsorozat hossza 61.

Második megoldás. Annak indoklása, hogy a keresett élsorozat hossza legalább 61, azonos az első megoldásban írttal. (5 pont)
Jelölje u, illetve v P_6, illetve P_8 egyik végpontját és töröljük G-ből az $\{u, v\}$ élt. (1 pont)
A kapott G' gráfban u és v foka 1-gyel csökkent, így párosra változott. Vagyis G'-ben már két kivétellel minden csúcs foka páros. (1 pont)
Igaz továbbá az is, hogy G' összefüggő gráf. Valóban, u és v között vezet út például a P_6, illetve P_8-beli szomszédaikon keresztül, amik egymással szomszédosak. Egyébként pedig ha két csúcs G'-ben nem szomszédos, akkor P_6 és P_8 közül ugyanahhoz kell tartozniuk, így nyilván vezet közöttük út (például P_6 vagy P_8 mentén). (1 pont)
Így a tanult tétel szerint G' tartalmaz Euler-sétát. (1 pont)
Következik, hogy G tartalmaz 61 hosszúságú olyan élsorozatot, ami G minden élét tartalmazza: ehhez a G'-beli Euler-sétát csak annyiban kell módosítani, hogy amikor a séta épp (mondjuk) u-hoz ér, akkor beszúrjuk kétszer egymás után az $\{u, v\}$ élt – vagyis először u-ból v-be, majd onnan vissza u-ba lépünk; ezután folytatjuk az Euler-séta bejárását. (1 pont)
Így a legrövidebb ilyen élsorozat hossza 61.

2. A G irányítatlan, egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. G-re lefuttattuk a BFS algoritmust az a csúcsból indítva és az egyes csúcsok előző(v) mutatóira az alábbiakat kaptuk:

v	:	a	b	c	d	e	f	g
előző(v)	:	$*$	a	a	b	c	c	f

a) Mennyi táv(g), vagyis a g csúcs távolsága a-tól?
b) Mennyi az a csúcs foka G-ben?
c) Mennyi a g csúcs foka G-ben, ha azt is tudjuk, hogy a BFS algoritmus a csúcsokat ábécé szerinti növekvő sorrendben járta be (vagyis a csúcsok ebben a sorrendben váltak aktív csúccsá)?

* * * * *

a) Az előző(g) $= f$, előző(f) $= c$, előző(c) $= a$ sorozat mentén lépegetve jutunk vissza a-hoz,(1 pont) így a BFS eljárás működéséből következően az a, c, f, g csúcsokat sorban érintő út egy legrövidebb út a-ból g-be. Ezért táv(g) $= 3$. (1 pont)
b) Mivel az eljárás a-ból indul, ezért az a minden szomszédját a-ból éri el. (1 pont)
Így a foka azoknak a v csúcsoknak a száma, amikre előző(v) $= a$, vagyis 2. (1 pont)
c) g-nek szomszédja f, hiszen előző(g) $= f$. (1 pont)
Mivel előző(g) (és táv(g)) csak az f aktívvá válásakor kapott értéket (1 pont)
és az a, b, c, d, e csúcsok mindegyike ennél korábban volt aktív, (1 pont)
ezért g nem lehet szomszédos az a, b, c, d, e csúcsok egyikével sem. (1 pont)
(Valóban, ha v volna az első olyan csúcs a, b, c, d, e közül, amelyikkel g szomszédos, akkor v aktívvá válásakor az eljárás a $\{v, g\}$ élt is vizsgálná és így előző(g) $= v$ volna.) (0 pont)
Következik, hogy g foka 1. (2 pont)
Ha egy megoldó felrajzolja a bejáráshoz tartozó BFS-fát és erről minden további indoklás nélkül leolvassa a és g fokát, az a b) és c) részekért járó, összesen 8 pontból csak a c) feladat pontozásában szereplő első 1 pontot szerezheti meg (annak ellenére is, hogy az eredményei helyesek), hiszen a feladat nem a csúcsok BFS-fabeli fokát kérdezte, hanem a G-beli fokát. További részpontszám csak akkor adható, ha a megoldásból (legalább részben) kiderül, hogy a-nak és g-nek nem lehetnek további szomszédai G-ben.

3. A 12 csúcsú G egyszerű gráf egy 5 csúcsú körből és egy 7 csúcsú körből készült úgy, hogy az egyik kör minden csúcsát összekötöttük a másik kör minden csúcsával (egy-egy él mentén). Határozzuk meg G-nek a $\chi(G)$ kromatikus számát és az $\omega(G)$ klikkszámát.

* * * * *

G csúcsai megszínezhetők 6 színnel. Valóban, az 5 és a 7 csúcsú körrel is megtehetjük, hogy az egyik csúcsát kiszínezzük egy színnel, majd ettől a csúcstól indulva és a kör mentén lépegetve két további színt használunk felváltva. Ha a két kör csúcsaira használt színek között nincs közös, akkor ezzel valóban egy helyes színezést kaptunk 6 színnel. (2 pont)
Megmutatjuk, hogy G csúcsai nem színezhetők meg 5 színnel. (0 pont)
Mivel az egyik kör minden csúcsa szomszédos a másik kör minden csúcsával, ezért ha az egyik kör

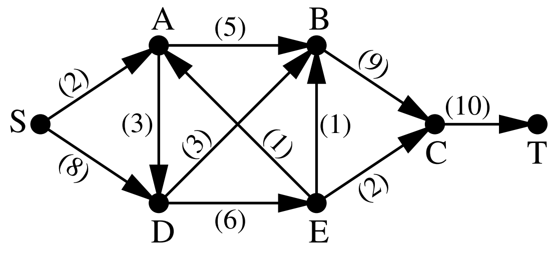
valamelyik csúcsát mondjuk tób színűre festjük, akkor a másik kör egyik csúcsa sem lehet tób. Vagyis a két kör színezéséhez használt színek halmaza diszjunkt. (2 pont)
A két kör színezéséhez külön-külön legalább három-három szín kell. Ez következik egyrészt abból a tanult tételből, hogy a páratlan kört tartalmazó gráfok nem párosak, így a kromatikus számuk legalább 3; de közvetlenül is könnyen látható: ha két színnel próbálnánk színezni bármelyik kör csúcsait, akkor ezt a két színt a kör mentén haladva felváltva kellene használni, de így az utolsó csúcshoz érve annak a két szomszédja már különböző színű volna, így ez a csúcs nem kaphatna színt. (1 pont)
Ezzel tehát beláttuk, hogy G nem színezhető meg 5 színnel, 6-tal viszont igen. Így $\chi(G) = 6$. (1 pont)
Ha mindkét körben kiválasztunk két-két, a kör mentén szomszédos csúcsot, akkor ezek együtt 4 csúcsú klikket alkotnak G-ben. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy G-ben nem létezik 5 csúcsú klikk. (0 pont)
Válasszunk ki ugyanis G csúcsai közül tetszőlegesen 5-öt. Ekkor a választott csúcsok közül legalább 3 ugyanahhoz a körhöz fog tartozni (a G készítéséhez használt 5 és 7 csúcsú körök közül). (1 pont)
E között a legalább 3 csúcs között azonban kell legyen kettő, amik nem szomszédosak, mert sem az 5 csúcsú, sem a 7 csúcsú körön belül nyilván nem található három csúcsú klikk. (1 pont)
Így a kiválasztott 5 csúcs nem alkot klikket. Ezzel tehát megmutattuk, hogy $\omega(G) = 4$. (1 pont)

4. A (14 csúcsú és 21 élű) G gráf egy hétszög alapú hasáb élhálója; vagyis G csúcsai azonosak a hasáb csúcsaival és két csúcs akkor szomszédos G-ben (egyetlen él mentén), ha a hasáb egyik éle összeköti őket. Határozzuk meg G-nek a $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

* * * * *

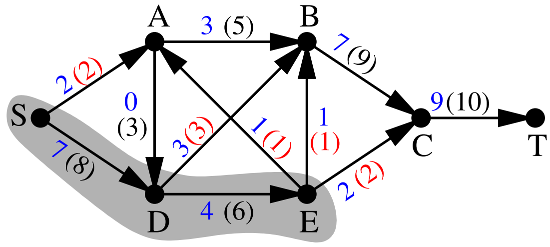
G-ben minden csúcs foka 3, így a G-beli maximális fokszám is $\Delta(G) = 3$. (1 pont)
Így a tanultak szerint $\chi_e(G) \geq 3$ (2 pont)
(ugyanis G nem tartalmaz hurokélt). (0 pont)
Megmutatjuk, hogy G élei megszínezhetők 3 színnel. (0 pont)
Színezzük meg a hasáb alaplapjának az éleit három színnel például úgy, hogy a hétszög egyik élét pirosra festjük és a többit felváltva kékre és zöldre. Most a hasáb fedőlapjának az éleit is színezzük meg ugyanezzel a három színnel úgy, hogy minden él színe legyen azonos az alaplap vele párhuzamos élével. (Vagyis az alaplap éleinek a színezését átmásoljuk a fedőlapra elforgatás nélkül, egyszerű eltolással.) Végül a hasáb minden oldaléle is kap egy színt ugyanebből a háromból: azt az egyet, amilyen színű él még nem illeszkedik az alaplapnak arra a csúcsára, amire a szóban forgó oldalél illeszkedik. Ekkor ugyanennek az oldalélnek a fedőlapon lévő végpontjára is három különböző színű él illeszkedik, mert a fedőlapon lévő két, rá illeszkedő él színe azonos az alaplapon lévő két megfelelő él színével. Így a kapott színezés helyes. (6 pont)
Mivel tehát G élei megszínezhetők 3 színnel, de kevesebbel nem, ezért $\chi_e(G) = 3$. (1 pont)
Természetesen G egy három színnel való élszínezését a fentihez hasonló szöveg helyett rajzzal is meg lehet adni. Ez akkor értékelhető, ha a rajz egyrészt valóban a feladatbeli gráfot ábrázolja, másrészt félreérthetetlenül és világosan kiderül minden egyes él színe (akár a rajz színezéséből, akár az él mellé írt jelből), harmadrészt az ábrázolt élszínezés helyes. Azonban a helyes élszínezésért járó 6 pont tovább nem osztható: ha a felsorolt feltételek bármelyike sérül, akkor ebből a 6 pontból részpontszám nem adható. Nem adható emellett részpontszám a Vizing-tétel alkalmazásáért (vagyis a $\chi_e(G) \leq 4$ állításért és annak indoklásáért) sem, mert ennek a feladat megoldásához nincs hozzáadott értéke.

5. a) Adjunk meg egy minimális kapacitású vágást a jobbra látható hálózatban (amiben S a termelő, T a fogyasztó).
b) Változtassuk most meg a C-ből T-be mutató él kapacitását 10-ről p-re, ahol p paraméter. Adjunk meg minden $p \geq 0$ értékre egy minimális kapacitású vágást a kapott hálózatban.



* * * * *

a) Az $\{S, D, E\}$ vágás kapacitása 9 (az alábbi ábrán pirossal jelölt kapacitások összege). (2 pont)
Az ábrán látható folyam értéke (az S-ből kilépő éleken a folyamértékek összege) szintén 9. (2 pont)
Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora, mint tetszőleges vágás kapacitása, ezért a 9 értékű folyam bizonyítja, hogy a 9 kapacitású vágás minimális. (2 pont)



b) Az a) feladat megoldása változtatás nélkül működik minden $p \geq 9$ esetben: az ott megadott folyam ugyanúgy bizonyítja, hogy a 9 kapacitású $\{S, D, E\}$ vágás minimális. (1 pont)
Vizsgáljuk ezért a $0 \leq p < 9$ esetet. Ekkor az $\{S, A, B, C, D, E\}$ vágás kapacitása p (hiszen egyedül a (C, T) él kapacitása járul hozzá), ami tehát kisebb 9-nél. (1 pont)
Legyen X tetszőleges vágás. Ha $C \in X$, akkor a (C, T) él kilép X-ből, így X kapacitása $c(X) \geq p$. Ha viszont $C \notin X$, akkor a (C, T) él nem lép ki X-ből, így $c(X)$ értéke nem függ p-től. Ekkor az a) feladat megoldásából tudjuk, hogy $c(X) \geq 9 > p$. (1 pont)
Következik, hogy a $0 \leq p < 9$ esetben az $\{S, A, B, C, D, E\}$ vágás minimális kapacitású. (1 pont)
Az a) kérdés pontozásában az utolsó 2 pont annak jár, aki érdemben indokolja, hogy a megadott vágás minimális kapacitású. Ez történhet máshogyan is, mint a fenti megoldásban: például a javítóutas algoritmus futtatásával, hivatkozva arra, hogy az eljárás leállása után S-ből elérhető csúcsok halmaza a tanultak szerint minimális kapacitású vágás; azonban üres frázisok (mint például: „a Ford-Fulkerson tétel miatt") nem érnek pontot. A b) kérdésben a $0 \leq p < 9$ esetben az $\{S, A, B, C, D, E\}$ vágás kapacitásának minimális volta indokolható a következőképpen is: szorozzuk meg az a) feladatban megadott folyam minden egyes élen felvett értékét $\frac{p}{9}$-cel. Az így kapott értékek szintén folyamot alkotnak, mert sem a kapacitás feltételek, sem a folyammegmaradási feltételek teljesülését nem sérti a beszorzás (az előbbiek esetében $\frac{p}{9} < 1$ miatt). Az így kapott folyam értéke p, ami tehát az a) feladatban írttal analóg módon igazolja a p kapacitású $\{S, A, B, C, D, E\}$ vágás minimális voltát.

6*. Mutassuk meg, hogy $\chi(\overline{G}) \leq \varrho(G)$ teljesül minden izolált pontot nem tartalmazó G egyszerű gráfra. ($\chi(G)$ a G kromatikus számát, $\overline{G}$ a G komplementerét, $\varrho(G)$ pedig a G-beli lefogó élek minimális számát jelöli.)

* * * * *

Első megoldás. Gallai tétele szerint $\nu(G) + \varrho(G) = n$, ahol n a gráf csúcsainak száma. (0 pont)
Így a bizonyítandó állítás ekvivalens ezzel: $\chi(\overline{G}) \leq n - \nu(G)$. (2 pont)
Legyen M egy maximális párosítás G-ben (vagyis $|M| = \nu(G)$) és készítsük el G csúcsainak a következő színezését: az M-beli élek végpontjait fessük azonos színűre, de mindegyik M-beli él esetén egy-egy másik színt használjunk. Végül az M által nem fedett csúcsok mind kapjanak egy-egy önálló színt (vagyis ezeknek a színe legyen különböző mindegyik más csúcs színétől). (2 pont)
Ezzel $\overline{G}$ helyes színezését adtuk meg. Valóban, csak az M-beli élek végpontjai kaptak azonos színt, de mivel M élei $E(\overline{G})$-ből hiányoznak, ezért $\overline{G}$-ben szomszédos csúcsok nem kaptak azonos színt. (2 pont)
Másrészt a színezéshez felhasznált színek száma $n - \nu(G)$, mert M éleinek végpontjaira $\nu(G)$ színt használtunk, a maradék $n - 2 \cdot \nu(G)$ csúcsra pedig egyet-egyet és ez összesen valóban $(n - 2 \cdot \nu(G)) + \nu(G) = n - \nu(G)$ szín. (2 pont)
Mivel $\overline{G}$ csúcsait megszíneztük $n - \nu(G)$ színnel, ebből $\chi(\overline{G}) \leq n - \nu(G) = \varrho(G)$ valóban következik. (2 pont)

Második megoldás. Legyen Z egy minimális lefogó élhalmaz G-ben (vagyis $|Z| = \varrho(G)$) és készítsük el G csúcsainak a következő színezését. Számozzuk meg Z éleit 1-től $\varrho(G)$-ig tetszőlegesen, majd minden v csúcshoz válasszunk egy tetszőleges, rá illeszkedő Z-beli élt és fessük v-t az annyiadik színre, mint a választott él sorszáma. (3 pont)
Mivel Z lefogó élhalmaz, ezért minden csúcsnak adtunk színt (mert van rá illeszkedő, Z-beli él). (1 pont)
Ha most az u és v (tetszőleges) csúcsok azonos színt kaptak, mondjuk a j-ediket, akkor őket összeköti a j-edik sorszámú Z-beli e_j él. (2 pont)
Mivel e_j hiányzik $E(\overline{G})$-ből, ezért u és v nem szomszédosak $\overline{G}$-ben. Ezzel megmutattuk, hogy a megadott színezés helyes színezése $\overline{G}$ csúcsainak. (2 pont)
Mivel $\overline{G}$ csúcsait megszíneztük $\varrho(G)$ színnel, ebből $\chi(\overline{G}) \leq \varrho(G)$ valóban következik. (2 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.
pótzárthelyi feladatok
pontozási útmutató
2024. május 28.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Hány 3 fokú csúcsa lehet egy olyan húsz csúcsú fának, aminek pontosan tíz 1 fokú és pontosan egy 10 fokú csúcsa van?

* * * * *

20 csúcsú fának a tanultak szerint 19 éle van, (1 pont)
így a fokszámainak összege 38. (1 pont)
Jelöljük a 10-től és 1-től eltérő fokú csúcsok halmazát U-val. U 9 csúcsot tartalmaz, (1 pont)
melyek fokszámösszege $38 - 10 \cdot 1 - 1 \cdot 10 = 18$. (1 pont)
Mivel a fák definíció szerint összefüggők, legalább 2 csúcsú fában nem lehet izolált pont, vagyis 0 fokú csúcs (1 pont)
(a „legalább 2 csúcsú” hiányáért ne vonjunk le pontot),
ezért minden csúcs foka legalább 1. (1 pont)
Az U-beli csúcsok foka így legalább 2 kell legyen, hiszen sem 1, sem 0 nem jön szóba (az utóbbi megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot). (2 pont)
Így U egyetlen csúcsának foka sem lehet 3, ellenkező esetben az U-beli csúcsok összfokszáma meghaladná a 18-at. (2 pont)

A fában tehát nem lehet 3 fokú csúcs. (0 pont)

Aki egyáltalán nem foglalkozik az esetleges 0 fokú csúcsokkal (mintha nem is létezhetnének ilyenek egyetlen gráfban sem), az ezért 2 pontot veszítsen. Aki megemlíti és használja, de nem bizonyítja, hogy minden fok legalább 1, az pedig ezért 1 pontot veszítsen.

2. Legyenek egy gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, két különböző csúcs pedig legyen pontosan akkor szomszédos, ha közülük a nagyobbik legalább kétszer akkora, mint a kisebbik. Döntsük el, hogy van-e a gráfnak Hamilton-köre.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Ha töröljük a gráfból az 50-nél kisebb számokhoz tartozó csúcsokat, (2 pont)
akkor olyan gráfot kapunk, melynek 1 darab 2 csúcsú és 49 darab 1 csúcsú komponense van. (2 pont)
Csakugyan: a visszamaradó gráf csúcsai az 50 és 100 közti egészek, amik közt egyetlen él megy, éspedig az 50 és a 100 közt. (2 pont)
Ez azért teljesül, mert bármely másik pár esetében vagy a kisebbik szám lesz legalább 51, vagy a nagyobbik legfeljebb 99, így a nagyobbik és a kisebbik hányadosa nem éri el a 2-t. (2 pont)
Mivel 49 pont törlése után a gráf 50 komponensre esett szét, a tanult állítás miatt nincs benne Hamilton-kör. (2 pont)

Hamilton-út és (rossz) Hamilton-kör bemutatásáért nem jár pont, mint ahogy azért sem, ha valaki azt mutatja meg, hogy egy konkrét Hamilton-út nem zárható Hamilton-körré.

3. A G egyszerű gráfnak 20 csúcsa és 101 éle van. Lehetséges-e, hogy G kromatikus száma
a) 2;
b) 3?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

a) G kromatikus száma nem lehet 2. (0 pont)
Ugyanis ha a kromatikus szám 2 lenne, G csúcsait két osztályba lehetne sorolni úgy, hogy él csak az osztályok közt menjen (ezt persze meg lehet másképp is fogalmazni: G páros gráf lenne). (2 pont)
Ha mindkét osztályban 10 csúcs van, akkor az élek száma legfeljebb $10 \cdot 10 = 100$ lehet, mert a gráf egyszerű (az utóbbi megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot), (1 pont)
ha pedig a két osztály mérete különböző, akkor a méretek különbsége legalább 2; ekkor a nagyobbikból a kisebbikbe egy pontot áttéve az elérhető élek száma nőne, így ilyenkor 100-nál kevesebb élünk lehetne csak. (2 pont)
Persze másképp is lehet az utóbbi állítás mellett érvelni, pl. a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséggel vagy az esetek felsorolásával. Hiányos, de érdemi bizonyítási kísérletért (pl. „Akkor lesz a legtöbb él, ha a két osztályban a csúcsok egyenletesen vannak elosztva.") 1 pontot adjunk, aki csak kijelenti, hogy nem lehet 100-nál több él, annak az utóbbi 2 pont természetesen nem jár.
b) A kromatikus szám lehet 3. (0 pont)
Legyen H az a páros gráf, melyben mindkét osztály 10 csúcsú és bármely két különböző osztálybeli csúcsot összekötünk egy-egy éllel. Legyen most G az a gráf, melyet H-ból úgy kapunk, hogy két azonos osztályba tartozó csúcsot összekötünk. (1 pont)
A kapott gráfnak 101 éle lesz, megmutatjuk, hogy a kromatikus száma 3. (0 pont)
Az a) rész miatt a kromatikus szám legalább 3 (de persze máshogy is lehet érvelni, pl. mutathatunk háromszöget a gráfban). (2 pont)
3 színnel pedig könnyű G-t megszínezni: színezzük H egyik osztályának csúcsait az 1, másik

osztályának csúcsait a 2 színnel, majd az extra él egyik végpontját színezzük át 3-asra, ekkor csakugyan nem megy él azonos színű csúcsok közt. (2 pont)

Aki rossz példát ad meg, vagyis olyat amelyre valamelyik tulajdonság (csúcsszám, élszám, kromatikus szám, egyszerűség) nem teljesül, az a rossz példa tulajdonságainak bizonyítására persze nem kaphat pontot.

4. Egy páros gráf két pontosztálya $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Az a_i és b_j csúcsok közt pontosan akkor van él, ha a jobbra látható mátrix i. sorának j. eleme 1 (ahol $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 8$). Adjunk meg egy maximális párosítást és egy minimális lefogó ponthalmazt a gráfban.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

$a_1, a_3, a_4, b_1, b_4, b_7, b_8$ egy 7 elemű lefogó ponthalmaz a páros gráfban, (2 pont)
mert a mátrixban szereplő összes 1-es az érintett sorok vagy oszlopok valamelyikében található (vagyis minden élnek legalább az egyik végpontja a felsoroltak között van). (1 pont)
Az $(a_1, b_5), (a_2, b_4), (a_3, b_2), (a_4, b_3), (a_5, b_7), (a_6, b_8), (a_8, b_1)$ élhalmaz egy 7 elemű párosítás, hiszen semelyik két élnek nincs közös végpontja (az utóbbi megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot). (1 pont)
A megadott lefogó ponthalmaz, illetve párosítás bizonyítja, hogy $\tau(G) \leq 7$, illetve $\nu(G) \geq 7$, (2+2 pont)
ahonnan a $\nu(G) \leq \tau(G)$ összefüggés szerint $\nu(G) = \tau(G) = 7$ és így a megadott párosítás maximális, a megadott lefogó ponthalmaz pedig minimális. (2 pont)

A $\nu(G) \leq \tau(G)$ állítás helyett lehet (bár szükségtelen) Kőnig tételére is hivatkozni, (páros gráfban $\nu(G) = \tau(G)$). A $\nu(G) = 7$ és $\tau(G) = 7$ állítások indoklásáért adható pontok viszont csak annak járnak, aki meggyőzően és világosan indokolja, hogy a megadott párosítás maximális, illetve a megadott lefogó ponthalmaz minimális. (Üres frázisok, mint például „Kőnig tétele miatt” nem érnek pontot.) Megjegyezzük, hogy a maximális párosítást és a minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult javítóutas algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges ennek a lépéseit dokumentálni. A párosítás maximalitásának és a lefogó ponthalmaz minimalitásának az indoklását viszont alapozhatjuk az algoritmusra is: ha (meggyőzően) megmutatjuk, hogy az adott párosításra nézve nincs javítóút, akkor a tanultak szerint az maximális; ha pedig ebben az esetben X az A-beli, a párosítás által lefedetlen csúcsokból alternáló úton elérhető B-beliekből és az alternáló úton el nem érhető A-beliekből áll, akkor az a tanultak szerint minimális méretű lefogó ponthalmaz.

5. Egy tizenhat csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 3, a független élek maximális száma pedig 7. Határozzuk meg a gráf élkromatikus számát.

* * * * *

Mivel a gráf egyszerű, használhatjuk Vizing tételét: $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$, így az élkromatikus szám legfeljebb 4. (2 pont)

Aki nem említi az egyszerűséget, az ezért 1 pontot veszítsen.

Bármely élszínezésben az azonos színű élek párosítást alkotnak, (1 pont)

így a feladat szövege szerint legfeljebb 7 élből állhatnak. (2 pont)

3 színnel tehát legfeljebb 21 élet tudunk jól kiszínezni, (2 pont)

a gráfnak viszont $\frac{16 \cdot 3}{2} = 24$ éle van. (1 pont)

Így legalább 4 színre van szükség a gráf élszínezéséhez, (1 pont)

a keresett élkromatikus szám tehát 4. (1 pont)

A $\chi_e(G) \geq 3$ állításért nem jár pont. Aki viszont a 4 színnel színezhetőség megállapítása után erőfeszítéseket tesz annak belátására, hogy 4 szín kell is, az kaphat 1 pontot akkor is, ha ezek az erőfeszítések nem járnak sikerrel.

6*. Egy 102 csúcsú G egyszerű gráfnak minden komponense 3 vagy 4 csúcsú. A gráfot egy lépésben átalakíthatjuk úgy, hogy először elhagyunk 3 tetszőleges élet, majd hozzáveszünk 1 tetszőleges élet (miközben a csúcshalmaz nem változik). Mutassuk meg, hogy akárhányszor is hajtjuk végre ezt a lépést G-ből kiindulva, soha nem kapunk összefüggő gráfot.

* * * * *

Állapítsuk meg először, hogy legfeljebb hány éle lehet a gráfnak. Mivel 3 csúcsú komponensben legfeljebb 3 él lehet, ami a komponens csúcsszámával azonos, 4 csúcsú komponensben pedig legfeljebb 6 él, ami 2-vel több, mint a komponens csúcsszáma, a lehető legtöbb élet akkor kapjuk, ha a lehető legtöbb 4 csúcsú komponensünk van. A 4 csúcsú komponensek száma ekkor 24, a 3 csúcsú komponensek száma 2, az éleké pedig $24 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 150$. (Itt kihasználtuk, hogy a gráf egyszerű, de e megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot.) (2 pont)

A komponensek száma nyilván ugyanekkor lesz minimális, vagyis ha a lehető legtöbb a 4 csúcsú komponens, ilyenkor – mint láttuk – 26 komponensünk lesz. (1 pont)

A gráf összefüggővé tételéhez legalább 25 élet kellene tehát bevennünk, (1 pont)

mert egy él bevétele legfeljebb eggyel csökkenti a komponensek számát (az elhagyás pedig nyilván nem tud csökkenteni). (1 pont)

Legalább 25 lépésre lenne tehát szükség, aminek a során háromszor annyi élet hagyunk el, mint amennyit beveszünk, így az élek száma legalább 50-nel csökkenne. (3 pont)

Mivel a gráfnak legfeljebb 150 éle volt eredetileg, ekkor legfeljebb 100 éle lehetne, így azonban nem lehet összefüggő, hiszen a tanultak szerint 102 csúcsú összefüggő gráfnak legalább 101 éle kell legyen. (2 pont)

Bár nem volt róla szó, hogy egy lépés végrehajtása közben is vizsgálni kellene az összefüggőséget, érdemes megállapítani, hogy mivel először hagyunk el éleket és aztán veszünk be egyet, a 25. lépés végrehajtása közben sem lehet a gráf összefüggő.