

Bevezetés a számításelméletbe II.

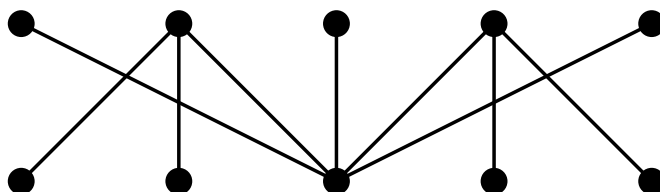
Zárthelyi feladatok

2023. május 18.

1. A 10 csúcsú G egyszerű gráfban teljesül, hogy bárhogyan is soroljuk fel a $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ csupa különböző csúcsokat, ahol $3 \leq k \leq 10$, a $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\dots$, $\{v_{k-1}, v_k\}$ és $\{v_k, v_1\}$ párok közül legalább az egyik benne van G élhalmazában. Mutassuk meg, hogy ekkor G -nek legalább 36 éle van.

2. A G egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$. G -ben szomszédos az 1 a 8-cal, ezen kívül pedig az $x, y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok pontosan akkor szomszédosak G -ben, ha $|x - y| \leq 2$. Milyen hosszú G -ben a lehető leghosszabb séta? (A tanultak szerint egy séta hossza alatt az éleinek a számát értjük.)

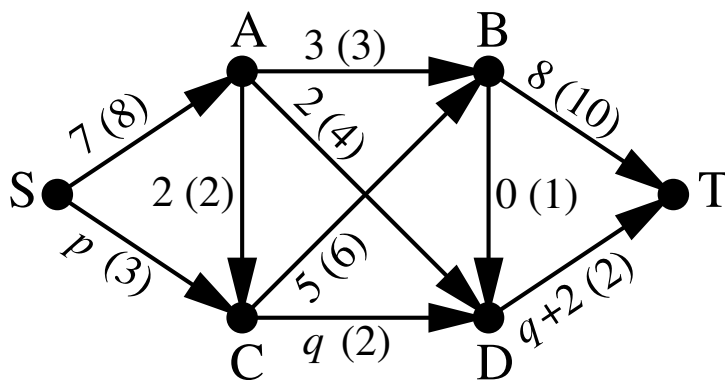
3. Legalább hány élt kell hozzávenni az alábbi gráfhoz ahhoz, hogy a kapott gráfban legyen teljes párosítás?



4. A G egyszerű gráf csúcsai a négy hosszúságú bitsorozatok és két csúcs akkor szomszédos G -ben, ha a megfelelő bitsorozatok pontosan egy helyen térnek el egymástól. Határozzuk meg G -nek a $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

5. a) A p és q valós paraméterek milyen értékére alkotnak a jobbra látható hálózatban az éleken szereplő értékek folyamat S -ből T -be? (Az ábrán zárójelben az élek kapacitása, a zárójelen kívül a folyamértékek láthatók.)

b) Igaz-e, hogy p -nek és q -nak erre az értékére maximális értékű folyamat kapunk a hálózatban?



6*. A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G) = 10$, a G -beli lefogó pontok minimális száma pedig $\tau(G) = 9$. Határozzuk meg G maximális klikkméretét, $\omega(G)$ -t.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, pusztán eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
pótzárthelyi feladatok
2022.06.06.

1. Egy 13 csúcsú fában van két 6 fokú csúcs. Mutassuk meg, hogy a fában nincs 3 fokú csúcs.

2. A G egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$. G -ben szomszédos az 1 a 8-cal, ezen kívül pedig az $x, y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok pontosan akkor szomszédosak G -ben, ha $|x - y| \leq 2$. Legalább hány csúcsot kell törölni (a rájuk illeszkedő élekkel együtt) G -ből ahhoz, hogy a kapott gráfnak legyen Euler-sétája?

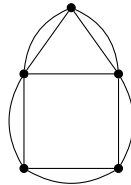
3. A G gráfról annyit tudunk, hogy pontosan két páratlan kör van benne és mindkettő tartalmazza a v csúcsot.

- a) Előfordulhat-e, hogy G kromatikus száma 2?
- b) Előfordulhat-e, hogy G kromatikus száma 3?
- c) Előfordulhat-e, hogy G kromatikus száma 4?

4. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_8\}$. Minden $1 \leq i \leq 8$ és $1 \leq j \leq 8$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j -vel, ha a jobbra látható mátrix i -edik sorának és j -edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg egy maximális párosítást és egy maximális független pontthalmazt G -ben.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Határozzuk meg az alábbi gráf élkromatikus számát.



6*. Egy 30 csúcsú egyszerű, összefüggő G gráfban minden pont foka legalább 10. Tudjuk, hogy G -nek van olyan éle, melyet törölve nem összefüggő gráfot kapunk. Mutassuk meg, hogy G -nek van Hamilton-útja.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele: a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, a pontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, pusztán eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

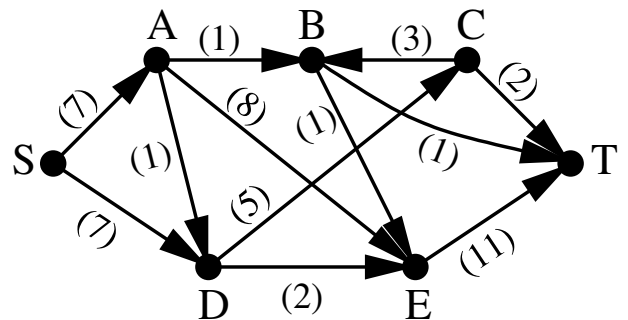
Díjköteles pótlás feladatok

2023. június 14.

1. A G egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$. G -ben szomszédos az 1 a 8-cal, ezen kívül pedig az $x, y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok pontosan akkor szomszédosak G -ben, ha $|x - y| \leq 2$. Izomorf-e a G gráf a saját komplementerével?
2. A 16 csúcsú G gráf csúcsai legyenek a síknak azok a pontjai, amiknek mindkét koordinátája 1 és 4 közötti egész szám (beleértve az 1-et és a 4-et is). (Ugyanez képletben: $V(G) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x, y \leq 4, x, y \in \mathbb{Z}\}$.) Az egymástól különböző $P = (a; b)$ és $Q = (c; d)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G -ben, ha $|a - c| \leq 1$ vagy $|b - d| \leq 1$; vagyis a $P \neq Q$ csúcsok akkor szomszédosak, ha valamelyik koordinátájukban legfeljebb 1-gyel térnek el egymástól. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.
3. A 8 csúcsú G gráfot úgy készítjük el, hogy egy 5 csúcsú teljes gráfhoz hozzáveszünk 3 izolált pontot, majd a kapott gráf komplementerét vesszük. Határozzuk meg $\varrho(G)$ -t, a G -beli lefogó élek minimális számát és adjunk meg G -ben egy minimális lefogó élhalmazt.
4. Valaki a BFS algoritmust (annak az irányított gráfokra vonatkozó változatát) futtatta az alábbi (a következő feladathoz is tartozó) ábra gráfjára és leírta, hogy az eljárás milyen sorrendben járta be a csúcsokat. Azonban a leírt sorozatban négy betű olvashatatlanná vált, ezeket $\square$ -k helyettesítik. Döntsük el az alábbiakról, hogy lehet-e a megmaradt, hiányos sorozat. Ahol a válasz igen, ott egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát. (Ebben a feladatban az élekre írt számoknak nincs szerepe. Feltételezhetjük, hogy az illető helyesen futtatta a BFS-t.)
a) $S, \square, D, C, \square, \square$ b) $S, \square, D, E, \square, \square, \square$

5. a) Határozzuk meg a jobbra látható hálózatban az $\{S, D\}$ vágás kapacitását.

b) Igaz-e, hogy $\{S, D\}$ minimális kapacitású vágás ebben a hálózatban?



6*. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Legyen továbbá $e \in E(G)$ a G gráf egy éle és $Z = \{f \in E(G) : w(f) \leq w(e)\}$ (vagyis Z a G -nek a $w(e)$ -nél nem nagyobb súlyú éleiből áll). Mutassuk meg, hogy ha $Z \setminus \{e\}$ nem tartalmazza egyetlen G -beli feszítőfa élhalmazát sem, de Z már igen, akkor G -nek minden minimális összsúlyú feszítőfája tartalmazza e -t.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. Az aláírás feltétele a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, pusztán eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2023. május 18.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontoszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontoszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek pusztán leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontoszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítéssel a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfőljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozathoz nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontoszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. A 10 csúcsú G egyszerű gráfban teljesül, hogy bárhogyan is soroljuk fel a $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ csupa különböző csúcsokat, ahol $3 \leq k \leq 10$, a $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\dots$, $\{v_{k-1}, v_k\}$ és $\{v_k, v_1\}$ párok közül legalább az egyik benne van G élhalmazában. Mutassuk meg, hogy ekkor G -nek legalább 36 éle van.

* * * * *

A feladatban írt feltétel miatt a $\overline{G}$ gráf (G komplementere) nem tartalmaz kört. Valóban: ha $\overline{G}$ tartalmazna kört és ez sorban a $v_1, v_2, \dots, v_k$ csúcsokat érintené, akkor a $\{v_1, v_2\}$, $\dots$, $\{v_{k-1}, v_k\}$ és $\{v_k, v_1\}$ párok közül mindegyik $\overline{G}$ éle volna, vagyis egyik sem tartozna G élhalmazába. (3 pont)

(Továbbá G egyszerű volta miatt $k \geq 3$ is teljesülne, mert az egy, illetve két csúcsú körök hurokél, illetve párhuzamos élek létét feltételeznék.) (0 pont)

$\overline{G}$ körmentességéből a tanult tétel szerint következik, hogy legfőljebb $10 - 1 = 9$ éle van. (3 pont)

Mivel G 10 csúcsából $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ pár készíthető és (2 pont)

ezek közül legfőljebb 9 van $\overline{G}$ élhalmazában, ezért G -nek valóban legalább $45 - 9 = 36$ éle van. (2 pont)

2. A G egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$. G -ben szomszédos az 1 a 8-cal, ezen kívül pedig az $x, y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok pontosan akkor szomszédosak G -ben, ha $|x - y| \leq 2$. Milyen hosszú G -ben a lehető leghosszabb séta? (A tanultak szerint egy séta hossza alatt az éleinek a számát értjük.)

* * * * *

G -ben az 1, 2, 7 és 8 csúcsok foka 3 és a többi csúcs foka 4, G éleinek a száma pedig 14. (0 pont)

Mivel 2-nél több páratlan fokú csúcsa van, ezért a tanult tétel szerint G -ben nincs Euler-séta. (2 pont)

Ez azt jelenti, hogy G -ben nincs 14 élű séta, vagyis a leghosszabb séta hossza legfőljebb 13. (3 pont)

Hagyjuk el most G -ből (például) az $\{1, 8\}$ élt. A kapott G' gráfban már csak 2 páratlan fokú csúcs van (hiszen 1 és 8 foka 2 lett). (1 pont)

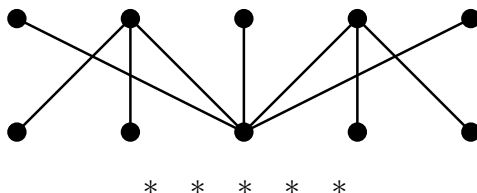
G' összefüggő, hiszen például már az $\{x, x+1\}$ típusú élek mentén is bármely két csúcsa között van út (vagyis az $1, 2, \dots, 8$ sorrendben bejárva a csúcsokat Hamilton-utat kapunk G' -ben). (1 pont)

Így a tanult tétel szerint G' -ben már van Euler-séta. (2 pont)

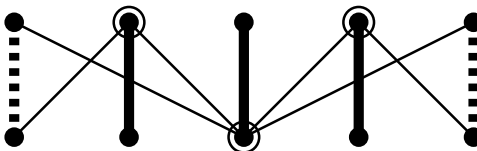
Következik, hogy G -ben van 13 élű séta, vagyis a leghosszabb séta hossza 13. (1 pont)

A fenti pontozás szerinti utolsó 5 pont természetesen megszerezhető úgy is, hogy a megoldó (rajzban vagy magyarázattal, de mindenképp világosan és helyesen) megad G -ben egy 13 élű sétát.

3. Legalább hány élt kell hozzávenni az alábbi gráfhoz ahhoz, hogy a kapott gráfban legyen teljes párosítás?



Jelölje a feladatbeli gráfot G . Az alábbi ábrán látható, hogy 2 élt elég hozzávenni G élhalmazához: például a két szaggatott vonallal jelölt élt behúzva ezek a további három vastagított éllel együtt teljes párosítást alkotnak a kapott gráfban. (3 pont)



Az ugyancsak a fenti ábrán bekarikázott három csúcs lefogó pontthalmazt alkot az (eredeti) G gráfban (hiszen G mindegyik élének legalább az egyik végpontja bekarikázott csúcs). (2 pont)

Így a tanultak szerint G -ben nincs 3-nál nagyobb párosítás, hiszen a három csúcsú lefogó pontthalmaz mutatja, hogy $\tau(G) \leq 3$, így a tanult $\nu(G) \leq \tau(G)$ összefüggés miatt $\nu(G) \leq 3$ is igaz. (2 pont)

Így egyetlen él hozzávételével nem kaphatunk a gráfban teljes párosítást; valóban, ha ez lehetséges volna, akkor ennek az élnek a törlése után legalább 4 élű párosítás maradna G -ben. (2 pont)

Következik, hogy a teljes párosításhoz minimálisan 2 élt kell hozzávenni G -hez. (1 pont)

Mivel a feladatbeli G gráf jól láthatóan páros gráf (sőt: fa), ezért a fenti megoldásban hivatkozhattunk volna König tételére, vagyis használhattuk volna a $\nu(G) = \tau(G)$ állítást is. Azonban ennek a feladat megoldásának a szempontjából semmilyen jelentősége nincs (így részpontoszám sem jár érte).

4. A G egyszerű gráf csúcsai a négy hosszúságú bitsorozatok és két csúcs akkor szomszédos G -ben, ha a megfelelő bitsorozatok pontosan egy helyen térnek el egymástól. Határozzuk meg G -nek a $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

* * * * *

G -ben minden csúcs foka 4, hiszen mindegyik csúcsnak megfelelő bitsorozatot 4 helyen változtathatjuk meg, hogy egy szomszédos csúcsba jussunk. (2 pont)

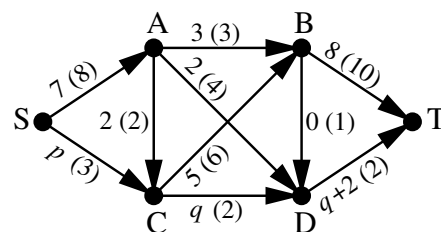
Így G -ben a maximális fokszám is $\Delta(G) = 4$. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy G páros gráf. Valóban, egy bit megváltoztatásával a bitek összege 1-gyel nő vagy csökken, vagyis a bitek összegének a paritása mindenképp megváltozik. Így ha A , illetve B jelöli a páros, illetve páratlan sok bitet tartalmazó csúcsok halmazát, akkor G -nek minden éle A -beli csúcsot köt össze B -belivel a páros gráf definíciójának megfelelően. (4 pont)

Mivel G páros gráf, ezért a tanult, megfelelő König-tétel miatt $\chi_e(G) = \Delta(G) = 4$. (3 pont)

Természetesen a feladat megoldható König tételére való hivatkozás nélkül is úgy, hogy megadjuk G egy helyes élszínezését 4 színnel. (Ez megtehető rajzban is vagy például úgy, hogy minden $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén i -edik színűre színezzük azokat az éleket, amik egy, az i -edik bitben eltérő csúcspárt kötnek össze.) Egy ilyen megoldásban a helyes élszínezésért 6 pont jár, továbbá a fenti pontozás szerinti első $2 + 1$ ponton felül további 1 pontot ér a tanult $\chi_e(G) \geq \Delta(G) = 4$ állításra való hivatkozás (ami miatt a megadott színezésből $\chi_e(G) = 4$ következik). (A $\chi_e(G) \geq \Delta(G) = 4$ kijelentésre természetesen akkor is jár az 1 pont, ha a megoldó nem tudja megadni G egy helyes élszínezését 4 színnel. Így egy eddig a pontig eljutó részmegoldás 4 pontot érhet.)

5. a) A p és q valós paraméterek milyen értékeire alkotnak a jobbra látható hálózatban az éleken szereplő értékek folyamot S -ből T -be? (Az ábrán zárójelben az élek kapacitása, a zárójelen kívül a folyamértékek láthatók.)



b) Igaz-e, hogy p -nek és q -nak erre az értékeire maximális értékű folyamot kapunk a hálózatban?

* * * * *

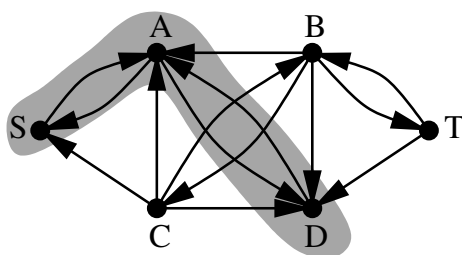
a) Az $e = (D, T)$ élre alkalmazva a folyam definíciójából adódó $f(e) \leq c(e)$ feltételt kapjuk, hogy $q + 2 \leq 2$, vagyis $q \leq 0$. (1 pont)

Hasonlóan, az $e = (C, D)$ élre alkalmazva az $f(e) \geq 0$ feltételt kapjuk, hogy $q \geq 0$. (1 pont)

Így tehát $q = 0$. (0 pont)

A folyam definíciója szerint a folyammegmaradás feltételét a C csúcsra felírva: $p + 2 = 5 + q$, amiből $q = 0$ miatt $p = 3$ adódik. (2 pont)

A b) kérdés első megoldása. Az alábbi ábrán látható a feladatban megadott folyamhoz tartozó segédgráf (a $p = 3$, $q = 0$ értékek mellett):



(2 pont)

Az ábrán látható, hogy a segédgráfban nincs irányított út S -ből T -be, (1 pont)

mert a segédgráfnak nincs az $\{S, A, D\}$ halmazból kivezető éle. (1 pont)

Így a tanult tétel miatt a megadott folyam maximális értékű (mert nincs rá nézve javítóút). (2 pont)

A b) kérdés második megoldása. A megadott folyam értéke $7 + 3 = 10$, így a maximális folyam értéke a hálózatban legalább 10. (1 pont)

Az $\{S, A, D\}$ vágás kapacitása $10 = 3 + 2 + 3 + 2$ (ahol a felsorolt összeadandók sorban az (S, C) , (A, C) , (A, B) és (D, T) élek kapacitásainak felelnek meg). (2 pont)

Így a minimális vágás kapacitása legfőbb 10. (1 pont)

Mivel a tanult Ford-Fulkerson tétel szerint a maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás kapacitásával, ezért ez a közös érték csak 10 lehet. Így a megadott folyam maximális értékű. (2 pont)

Ebben a megoldásban a Ford-Fulkerson tétel helyett elég lett volna hivatkozni a „maximális folyam $\leq$ minimális vágás” állításra is, az indoklás ezzel is teljes lett volna.

6*. A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G) = 10$, a G -beli lefogó pontok minimális száma pedig $\tau(G) = 9$. Határozzuk meg G maximális klikkméretét, $\omega(G)$ -t.

* * * * *

$\tau(G) = 9$ miatt G -ben van 9 csúcsú lefogó pontthalmaz. Legyen X ilyen. (0 pont)

Ekkor a tanultak (vagy egyszerűen a lefogó pontthalmaz definíciója) miatt $V(G) \setminus X$ független pontthalmaz, vagyis X -be nem tartozó csúcsok csak X -beliekkel lehetnek szomszédosak G -ben. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy X klikket alkot. Tegyük fel ezért indirekt, hogy az $u, v \in X$, $u \neq v$ csúcsok nem szomszédosak G -ben. Színezzük ekkor u -t és v -t pirosra, $V(G) \setminus X$ csúcsait kékre, X többi csúcsára pedig használjunk egy-egy külön színt. Így helyesen színeztük meg G csúcsait $1 + 1 + 7 = 9$ színnel, ellentmondásban azzal, hogy $\chi(G) = 10$. Ez az ellentmondás mutatja, hogy X valóban klikk. (3 pont)

Megmutatjuk, hogy $(V(G) \setminus X)$ -nek van olyan csúcsa, ami X minden csúcsával szomszédos. Tegyük fel ezért indirekt, hogy $(V(G) \setminus X)$ minden csúcsa legfőbb 8-cal szomszédos X csúcsai közül. (0 pont)

Színezzük most ki X csúcsait 9 különböző színnel, majd $V(G) \setminus X$ minden v csúcsát egy olyan X -beli csúcs színére, amivel v nem szomszédos. Ezzel ismét helyesen színeztük meg G csúcsait 9 színnel, ami megint ellentmondás. (3 pont)

Következik tehát, hogy G -ben van 10 csúcsú klikk. (2 pont)

11 csúcsú klikk viszont nyilván nem létezhet $\omega(G) \leq \chi(G) = 10$ miatt. Így $\omega(G) = 10$. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.
pótzárthelyi feladatok
pontozási útmutató
2023. június 6.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, gondolatért, amely egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, bizonyítás nélkül hivatkozni azonban csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet.

1. Egy 13 csúcsú fában van két 6 fokú csúcs. Mutassuk meg, hogy a fában nincs 3 fokú csúcs.

* * * * *

Első megoldás. 13 csúcsú fának a tanultak szerint 12 éle van, (1 pont)

így a fokszámainak összege 24. (1 pont)

A két 6 fokú csúcs fokszámmösszege 12, így a maradék 11 csúcs fokösszege 12. (2 pont)

Mivel a fák definíció szerint összefüggők, legalább 2 csúcsú fában nem lehet izolált pont, vagyis 0 fokú csúcs, (1 pont)

(a „legalább 2 csúcsú” hiányáért ne vonjunk le pontot)

így minden csúcs foka legalább 1, amiből az következik, hogy egyetlen csúcs foka sem lehet 3, (1 pont)

ellenkező esetben lenne 10 csúcsunk, melyek összfoka 9, ami ellentmondana az iménti megállapításnak. (4 pont)

Második megoldás. Azt fogjuk először megmutatni, hogy a két 6 fokú csúcsnak vagy van pontosan egy közös szomszédja vagy ők maguk szomszédosak. Ez a megállapítás helyes bizonyítással 3 pontot ér. Ezt követően tárgyaljuk a két említett esetet, melyek (szintén megfelelő bizonyítással) 3, illetve 4 pontot érnek. Részletesen:

Legyen a és b a két 6 fokú csúcs. Tekintsük át a gráf csúcsait: a -n és b -n kívül tudunk ezek 6-6 szomszédjáról is. (0 pont)

Ha ezek egymástól, továbbá a -tól és b -től is különbözők lennének, akkor a gráfnak 14 csúcsa lenne, így ez persze nem teljesül, (1 pont)

tehát vagy van közös szomszédja a -nak és b -nek, vagy egymással szomszédosak. (1 pont)

Ha van közös szomszédjuk, akkor csak egy ilyen lehet, különben kör lenne a fában, ami természetesen lehetetlen és ilyenkor a és b szomszédok sem lehetnek, ismét csak azért, mert ekkor kör lenne a fában. (1 pont)

Így a gráfnak mind a 13 csúcsát számba vettük: a , b , a közös szomszéd és az $5 + 5$ saját szomszéd. (1 pont)

Az e csúcsok közti szomszédsági viszonyok alapján ismert élek mentén bármely 2 csúcs közt lesz út, így a fában további élek nincsenek is (mert az eddig ismertek már egy feszítőfáját alkotják – ezt nem kell feltétlen leírni a pontért). (1 pont)

Így a közös szomszéd 2 fokú, a saját szomszédok 1 fokúak (a és b pedig 6 fokú), 3 fokú csúcs tehát valóban nincs a fában. (1 pont)

Ha a és b szomszédos, akkor közös szomszédjuk persze nem lehet (a fenti okok miatt), ekkor a fából 12 csúcsot látunk: a , b , és az $5 + 5$ saját szomszéd. (1 pont)

A fa összefüggősége miatt a hiányzó csúcs az ismertek valamelyikéhez kell kapcsolódjon egy éllel és ezzel az ismert éleken kívül megint csak nincs további él. (1 pont)

A saját szomszédok egyike 2 fokú, a többi 1 fokú, a 13. csúcs pedig szintén 1 fokú, így most sincs 3 fokú csúcs, amivel a bizonyítást befejeztük. (1 pont)

A második megoldásban lényegében azt mutattuk meg, hogy a fa (izomorfia erejéig) csak kétféleképp nézhet ki és persze egyik esetben sem lesz benne 3 fokú csúcs. Aki ezt állapítja meg és a két lehetőséget be is mutatja, de egyáltalán nem bizonyítja be, hogy más lehetőség nincs, az 2 pontot kapjon.

2. A G egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$. G -ben szomszédos az 1 a 8-cal, ezen kívül pedig az $x, y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok pontosan akkor szomszédosak G -ben, ha $|x - y| \leq 2$. Legalább hány csúcsot kell törölni (a rájuk illeszkedő élekkel együtt) G -ből ahhoz, hogy a kapott gráfnak legyen Euler-sétája?

* * * * *

G -ben az 1, 2, 7 és 8 csúcsok foka 3, a többi csúcs foka 4. (0 pont)

Mivel kettőnél több páratlan fokú csúcsa van, ezért a tanultak szerint nincs Euler-sétája, vagyis 0 pont törlése nem elég. (2 pont)

Az 1-es csúcs törlése után 2 és 8 foka 2-re változik, 3 foka pedig 3-ra, így a kapott gráfban csak két páratlan fokú csúcs lesz: 3 és 7. (Ezek a pontok akkor járnak, ha valaki talál olyan csúcsot, amit elhagyva csak két páratlan fok keletkezik, céltalan elhagyások után kiszámolt fokokra még részben sem.) (3 pont)

Könnyen meggyőződhetünk arról is, hogy a kapott gráf összefüggő (2-3-4-5-6-7-8 egy Hamilton-útja pl.), (2 pont)

így a tanultak szerint van Euler-sétája, (2 pont)

a keresett minimum tehát 1. (1 pont)

A tanult tétel használata helyett természetesen meg is lehet adni egy Euler-sétát egy alkalmas csúcs elhagyása után kapott gráfban, erre a megoldásra is jár a harmadik, negyedik és ötödik részpontszám (persze ha a leírás teljes).

3. A G gráfról annyit tudunk, hogy pontosan két páratlan kör van benne és mindkettő tartalmazza a v csúcsot.

- a) Előfordulhat-e, hogy G kromatikus száma 2?
 b) Előfordulhat-e, hogy G kromatikus száma 3?
 c) Előfordulhat-e, hogy G kromatikus száma 4?

* * * * *

a) Mivel páratlan köröket nem lehet 2 színnel színezni, a kromatikus szám nem lehet 2. (Hivatkozhatunk természetesen arra is, hogy a 2-színezhető gráfok épp a páros gráfok, amelyek a tanultak szerint nem tartalmazznak páratlan kört.) (1 pont)

b) Ez előfordulhat, tekintsük például a csokornyakkendő gráfot (vagyis azt a gráfot, mely két három hosszú körből áll, melyeknek egy pontja közös). Ez a gráf megfelel a feltételeknek és a kromatikus száma 3. (1 pont)

Valóban, a csúcsok színezhetők három színnel: a háromszögek csúcsai az 1,2,3 színeket kapják oly módon, hogy a közös csúcs (mondjuk) 1-es színű, két szín viszont a korábban látottak miatt (páratlan kör) nem elég. (1 pont)

c) A v csúcsot törölve a kapott gráfnak nem lesz páratlan köre, (1 pont)

hiszen a törléstől ilyen nem keletkezhet, G páratlan körei pedig tartalmazták v -t. (1 pont)

A törlés után kapott G' gráf tehát a tanultak szerint páros gráf, (1 pont)

vagyis 2-színezhető. (1 pont)

Ebből következik, hogy G 3-színezhető kell legyen. (1 pont)

Valóban, G' egy jó 2-színezését véve és a v csúcsot egy harmadik színnel színezve G jó 3-színezését kapjuk, (1 pont)

így G kromatikus száma nem lehet 4. (1 pont)

4. Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_8\}$. Minden $1 \leq i \leq 8$ és $1 \leq j \leq 8$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j -vel, ha a jobbra látható mátrix i -edik sorának és j -edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg egy maximális párosítást és egy maximális független ponthalmazt G -ben.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrix alapján könnyen ellenőrizhető, hogy $a_1, a_4, a_6, a_8, b_3, b_5, b_8$ egy 7 elemű lefogó ponthalmaz a páros gráfban, (2 pont)

mert a mátrixban szereplő összes 1-es az érintett sorok vagy oszlopok valamelyikében található. (1 pont)

Az $(a_1, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_8), (a_4, b_1), (a_6, b_4), (a_7, b_5), (a_8, b_6)$ élhalmaz egy 7 elemű párosítás, hiszen semelyik két élnek nincs közös végpontja. (1 pont)

A megadott lefogó ponthalmaz, illetve párosítás bizonyítja, hogy $\tau(G) \leq 7$, illetve $\nu(G) \geq 7$, (1+1 pont)

ahonnan a $\nu(G) \leq \tau(G)$ összefüggés szerint $\nu(G) = \tau(G) = 7$ és így a megadott párosítás maximális, a megadott lefogó ponthalmaz pedig minimális. (1 pont)

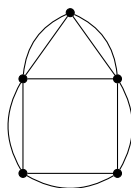
A tanultak szerint ekkor a fent megadott ponthalmaz komplementere, vagyis $a_2, a_3, a_5, a_7, b_1, b_2, b_4, b_6, b_7$ egy maximális független ponthalmaz. (3 pont)

Aki csak a maximális független ponthalmaz méretét határozza meg (pl. Gallai tétele segítségével), az az utolsó 3 pontból 1-et kapjon, csakúgy, mint az, aki megtalálja ugyan a maximális független ponthalmazt, de a maximalitást nem indokolja.

A $\nu(G) \leq \tau(G)$ állítás helyett lehet (bár szükségtelen) König tételére is hivatkozni, (páros gráfban $\nu(G) = \tau(G)$). A $\nu(G) = 7$ állítás indoklásáért járó összesen 3 pont viszont csak annak jár,

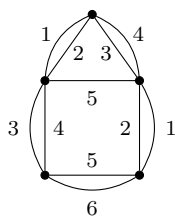
aki meggyőzően és világosan indokolja, hogy a megadott párosítás maximális. (Üres frázisok, mint például „Kőnig tétele miatt” nem érnek pontot.) Megjegyezzük, hogy a maximális párosítást és a minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult javítóutas algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges ennek a lépéseit dokumentálni. A párosítás maximalitásának és a lefogó ponthalmaz minimalitásának az indoklását viszont alapozhatjuk az algoritmusra is: ha (meggyőzően) megmutatjuk, hogy az adott párosításra nézve nincs javítóút, akkor a tanultak szerint az maximális; ha pedig ebben az esetben X az A -beli, a párosítás által lefedetlen csúcsokból alternáló úton elérhető B -beliekből és az alternáló úton el nem érhető A -beliekből áll, akkor az a tanultak szerint minimális méretű lefogó ponthalmaz.

5. Határozzuk meg az alábbi gráf élkromatikus számát.



* * * * *

Az alábbi jó élszínezés 6 színt használ, így az élkromatikus szám legfeljebb 6.



(5 pont)

Az élkromatikus szám ugyanakkor nem lehet kisebb sem 6-nál.

(0 pont)

Ugyanis bármely színosztály párosítást alkot,

(1 pont)

a maximális párosítás mérete pedig legfeljebb 2, hiszen a gráfnak csak 5 csúcsa van,

(1 pont)

így 5 színnel legfeljebb 10 élet tudunk jól kiszínezni, a gráfnak viszont 11 éle van.

(3 pont)

A felső becsléshez nem használható a Vizing-tétel, hiszen a gráf nem egyszerű, aki erre alapoz, az a vonatkozó 5 pontból 0-t kapjon.

6*. Egy 30 csúcsú egyszerű, összefüggő G gráfban minden pont foka legalább 10. Tudjuk, hogy G -nek van olyan éle, melyet törölve nem összefüggő gráfot kapunk. Mutassuk meg, hogy G -nek van Hamilton-útja.

* * * * *

Legyen $e = (a, b)$ olyan él, melyet elhagyva a gráf már nem összefüggő. Ekkor a $G - e$ gráfnak két komponense lesz, ellenkező esetben e visszarakásával nem kaphatnánk összefüggő gráfot.

(1 pont)

Legyen az a csúcsot tartalmazó komponens A , a b csúcsot tartalmazó komponens B . Mindkét komponensben teljesül, hogy egy csúcs (a , illetve b) foka legalább 9, a többi csúcs foka legalább 10.

(1 pont)

Mivel a gráf egyszerű, így mindkét komponensben legalább 11 csúcsnak kell lennie,

(1 pont)

amiből az is következik, hogy mindkét komponens legfeljebb 19 csúcsú. (2 pont)

Az Ore-tétel feltétele így mindkét komponensben teljesül, tehát a tétel szerint mindkét komponensnek van Hamilton-köre. (2 pont)

Hagyjunk el az A komponens egy Hamilton-köréből egy a -ra illeszkedő élet, így A egy Hamilton-útját kapjuk, nevezzük ezt P -nek. Hasonlóan, hagyjunk el B egy Hamilton-köréből egy b -re illeszkedő élet, így B egy Hamilton-útját kapjuk, nevezzük ezt Q -nak. (2 pont)

Ekkor a P , Q és e uniójából álló élhalmaz G egy Hamilton-útja, amivel a bizonyítást befejeztük. (1 pont)