Bevezetés a számításelméletbe II.
zárthelyi feladatok
a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
2021.04.30.

1. Birnenkopf úr új jelszót szeretne készíteni magának, mert a régit (`herrbirnenkopf`) ellopták. A jelszóval kapcsolatban a következő elvárásai vannak:

a) csak betűkből álljon (a számokat nem szereti), az angol abc 26 betűje jöhet szóba,

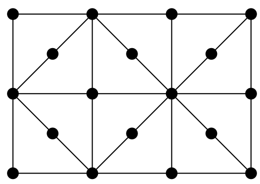
b) egyetlen betű sem jelenhet meg egynél többször,

c) pontosan 12 betű kell szerepeljen, mégpedig 7 kisbetű és 5 nagybetű, de ugyanaz a betű csak az egyik alakjában szerepelhet.

Hány jelszóból választhat Birnenkopf úr? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

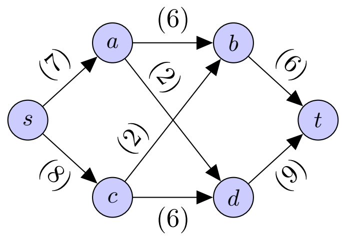
2. Egy szabályos 11-szögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (11 csúcsú, 22 élű) gráf kromatikus számát.

3. Adjunk meg egy maximális párosítást és egy minimális lefogó ponthalmazt az alábbi gráfban.



4. Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfot *teljes páros gráfnak* nevezünk, ha A minden csúcsa össze van kötve B minden csúcsával (egy éllel). Hány különböző 101 csúcsú teljes páros gráf létezik, melynek van Euler-sétája? (Két gráfot akkor tekintünk különbözőnek, ha nem izomorfak.)

5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot s-ből t-be és egy minimális $s-t$ vágást.



6*. Egy 100×100-as sakktáblán kijelölünk 30 mezőt úgy, hogy összefüggő területet alkossanak, vagyis bármely kijelölt mezőből el lehessen jutni bármelyik másikba úgy, hogy oldalszomszédos kijelölt mezőkre léphetünk át (akárhányszor). Mutassuk meg, hogy ekkor a kijelölt mezőkön mindig el lehet helyezni 8 darab 1×2-es dominót átfedés nélkül úgy, hogy minden dominó a sakktábla két szomszédos mezőjét fedi le.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc, a dolgozatok feltöltésére további 15 perc áll rendelkezésre. Az aláírás feltétele: a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, a pontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok
a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
2021. május 18.

1. A G egyszerű gráf csúcsai legyenek egy 10 elemű halmaz 4 elemű részhalmazai. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. Hány éle van G-nek? (Adjuk meg a végeredmény számszerű értékét is. Ennek kiszámításához számológépet használni szabad ugyan, de a megoldásból derüljön ki, hogy a végeredményt hogyan lehetne megkapni egy olyan számológéppel, ami csak a négy alapműveletet ismeri.)

2. A tíz csúcsú G teljes gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Minden $1 \le i < j \le 10$ esetén az $\{i, j\}$ él súlya legyen $\left\lfloor \frac{2j-i}{3} \right\rfloor$ (ahol a $\lfloor\ \rfloor$ alsó egészrészt jelöl). Adjunk meg G-ben egy minimális összsúlyú feszítőfát.

3. Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfot teljes páros gráfnak nevezünk, ha A minden csúcsa össze van kötve B minden csúcsával (egy éllel). Hány különböző 100 csúcsú teljes páros gráf létezik, aminek van Hamilton-köre? (Két gráfot akkor tekintünk különbözőnek, ha nem izomorfak.)

4. A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_7\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_7\}$. Minden $1 \le i \le 7$ és $1 \le j \le 7$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg egy maximális párosítást és egy minimális lefogó ponthalmazt G-ben.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. A G gráf legyen egy 6 csúcsú (és 5 élű) út komplementere. Határozzuk meg G-nek a $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

6*. Legyen adott egy G irányított gráf, az $s, t \in V(G)$ termelő, illetve fogyasztó csúcsok, a $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény, valamint egy e él, amire $c(e) > 0$. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha van olyan minimális kapacitású st-vágás, amiből e kilép, akkor minden f maximális értékű folyam esetén $f(e) = c(e)$.

b) Ha minden f maximális értékű folyam esetén $f(e) = c(e)$, akkor van olyan minimális kapacitású st-vágás, amiből e kilép.

(Az $e = (u, v)$ él *kilép* az X vágásból, ha $u \in X$ és $v \notin X$.)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc, a dolgozatok feltöltésére további 20 perc áll rendelkezésre. Az aláírás feltétele: a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, a pontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

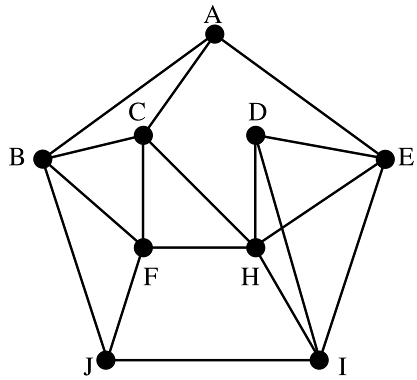
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Aláíráspótló zárthelyi feladatok
a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
2021. május 27.

1. Egy 20 fős önkormányzati képviselőtestület a tagjai közül 5 fős bizottságot választ a községi Töpörtyű Napok eseménysorozatának megszervezésére. A bizottság tagjai közül néhányan a polgármesteri keretből kiemelt díjazásban részesülnek; erről a polgármester saját hatáskörben dönt, így a kiemelten díjazottak száma 0 és 5 között bármennyi lehet. Hányféleképpen alakulhat meg a bizottság (ha két esetet nem csak akkor tekintünk különbözőnek, ha a bizottság tagsága más, hanem akkor is, ha nem ugyanazok a kiemelten díjazottak)? (Adjuk meg a végeredmény számszerű értékét is. Ennek kiszámításához számológépet használni szabad ugyan, de a megoldásból derüljön ki, hogy a végeredményt hogyan lehetne megkapni egy olyan számológéppel, ami csak a négy alapműveletet ismeri.)

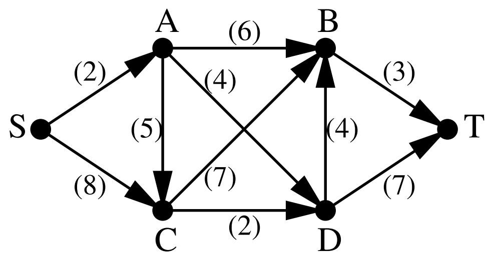
2. A jobbra látható G gráf mely e éleire teljesül, hogy G-ben van olyan séta, ami e-n kívül a gráf mindegyik élét tartalmazza? Minden ilyen e élre adjunk is meg egy ilyen sétát.

3. Határozzuk meg jobbra látható G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.



4. A 20 csúcsú G gráf élei közül bárhogyan is választunk ki 8-at, G-nek mindig van olyan csúcsa, amire legalább kettő illeszkedik a kiválasztott élek közül. Mutassuk meg, hogy ekkor bárhogyan választunk ki G élei közül 12-t, G-nek mindig van olyan csúcsa, amire egy sem illeszkedik a kiválasztott élek közül.

5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot S-ből T-be és egy minimális ST-vágást.



6*. Egy G összefüggő gráf u és v csúcsainak *távolsága* alatt az u és v közötti legrövidebb út hosszát (vagyis éleinek a számát) értjük. A G gráf *átmérője* alatt a G-beli csúcspárok távolságának maximumát (vagyis a legtávolabbi csúcsok távolságát) értjük. Mutassuk meg, hogy ha a 24 csúcsú G egyszerű gráfban az egyik csúcs foka 5, az összes többi csúcs foka pedig 3, akkor G átmérője legalább 4.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc, a dolgozatok feltöltésére további 20 perc áll rendelkezésre. Az aláírás feltétele: a zárthelyin legalább 24 pont elérése. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, a pontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont.

Bevezetés a számításelméletbe II.
zárthelyi feladatok
a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
pontozási útmutató
2021. április 30.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. A zárthelyiben egyes feladatoknak több (lényegesen nem eltérő) verziója is megjelent. Az útmutató minden feladat egy verziójához leírja (legalább) egy megoldás főbb gondolatait és közli az ezekhez rendelt részpontszámokat. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, gondolatért, amely egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, bizonyítás nélkül hivatkozni azonban csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet.

1. Birnenkopf úr új jelszót szeretne készíteni magának, mert a régit (`herrbirnenkopf`) ellopták. A jelszóval kapcsolatban a következő elvárásai vannak:

a) csak betűkből álljon (a számokat nem szereti), az angol abc 26 betűje jöhet szóba,

b) egyetlen betű sem jelenhet meg egynél többször,

c) pontosan 12 betű kell szerepeljen, mégpedig 7 kisbetű és 5 nagybetű, de ugyanaz a betű csak az egyik alakjában szerepelhet.

Hány jelszóból választhat Birnenkopf úr? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

* * * * *

Első megoldás. Hozzuk létre először a jelszónak azt a verzióját, ahol a kis- és nagybetűk még nem játszanak szerepet. (1 pont)
Mivel minden betű csak egyszer szerepelhet, ezt a tanultak szerint $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 15$-féleképp

tehetjük meg. (3 pont)
Válasszuk ki most, hogy hova kerül kis-, illetve nagybetű: (1 pont)
a 12 helyből 5-re kerül nagybetű, a választási lehetőségek száma tehát $\binom{12}{5}$ (hiszen a nagybetűk helyének kiválasztásával a kisbetűk helyzete is adottá válik). (3 pont)
Mivel a jelszó minden kezdeti verzióját ennyiféleképp tudjuk végleges jelszóvá alakítani, (1 pont)
a keresett szám $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 15 \cdot \binom{12}{5} = \frac{26\cdot25\cdot24\cdot\ldots\cdot15\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2}$. (1 pont)

Második (nem túl különböző) megoldás. Válasszuk ki először, hogy melyik kisbetűk és milyen sorrendben szerepeljenek a jelszóban. Ezt a tanultak szerint $26 \cdot 25 \cdot \ldots \cdot 20$-féleképp tehetjük meg. (1 pont)
Jöjjenek most a nagybetűk. Itt a kiválasztott kisbetűk nagy változatai nem használhatók, (1 pont)
így ezeket $19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \ \cdot 15$-féleképp választhatjuk ki. (1 pont)
A választási lehetőségek száma e két szám szorzata lesz, hiszen bármely kisbetűsorozathoz bármely nagybetűsorozatot választhatjuk. (1 pont)
Már csak azt kell eldöntenünk, hogy hova kerüljön kis-, illetve nagybetű, innen a megoldás azonos az előzővel.

Harmadik megoldás. Válasszuk ki először, hogy melyik kis-, illetve nagybetűk szerepeljenek a jelszóban. Ezt $\binom{26}{7}$, illetve $\binom{19}{5}$ módon tudjuk megtenni, (2 pont)
hiszen a betűk különbözők és a már kiválasztott kisbetűk nagy megfelelőit nem választhatjuk. (2 pont)
Az eddigi választási lehetőségek száma e két szám szorzata lesz, hiszen bármely kisbetűhalmazhoz bármely nagybetűhalmazt választhatjuk. (1 pont)
Már csak annyi dolgunk van, hogy a kapott betűket sorbarakjuk, (1 pont)
ez a tanultak szerint 12!-féleképp lehetséges. (1 pont)
A jelszavak száma tehát $\binom{26}{7} \cdot \binom{19}{5} \cdot 12!$, hiszen a korábbi választási lehetőségek mindegyikét 12! módon tudjuk sorbarendezni. (1 pont)
Ezt a négy alapművelettel felírva: $\frac{26\cdot25\cdot24\cdot\ldots\cdot15\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2}$. (2 pont)

Bár a feladat szövege a négy alapművelet használatát engedélyezi, ne vonjunk le pontot a faktoriális jelölés használatáért. Ha azonban valaki nem számolja ki a binomiális együtthatók értékeit, a vonatkozó pontokat ne kapja meg.

2. Egy szabályos 11-szögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (11 csúcsú, 22 élű) gráf kromatikus számát.

* * * * *

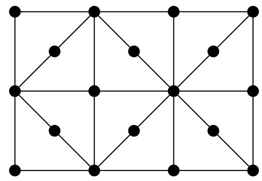
A gráfot könnyű 4 színnel megszínezni, jó színezésért adjunk 3 pontot.

Megmutatjuk, hogy 3 szín nem elég. Sorszámozzuk a 11-szög csúcsait tetszőleges csúcsnál kezdve az óramutató járása szerint. Tegyük fel indirekten, hogy létezik a gráfnak jó 3-színezése. (1 pont)
Ekkor az első három csúcs három különböző színt kapna, (mondjuk az első az 1-et, a második a 2-t, a harmadik a 3-at). (1 pont)
Ekkor a negyedik csúcs ismét 1-es színű kéne legyen, (1 pont)
hiszen van 2-es és 3-as színű szomszédja is. (1 pont)
Az ötödik csúcs így 2-es színű kéne legyen, hiszen van 1-es és 3-as színű szomszédja is. A gondolatmenetet folytatva az derül ki, hogy a tizedik csúcs 1-es színű kell legyen, (1 pont)
ez azonban nem lehetséges, hiszen szomszédja az első csúcs (is). (1 pont)

A kromatikus szám így 4, mivel a látottak szerint legalább és legfeljebb is 4. (1 pont)

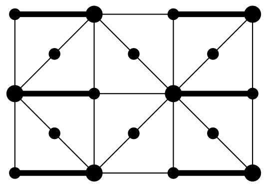
Ügyeljünk rá, hogy a fentihez látszólag nagyon hasonló megoldások lehetnek teljesen rosszak is, pl. ha a megoldó azért színez így, mert a mohó algoritmust követi (akár kimondva, akár kimondatlanul). Ez pl. abból látszik jól, hogy nem abból indul ki (indirekten), hogy csak 3 színt lehet használni.

3. Adjunk meg egy maximális párosítást és egy minimális lefogó ponthalmazt az alábbi gráfban.



* * * * *

Az alábbi ábrán a vastagított élek 6 élű párosítást, (2 pont)
a nagyobb méretű csúcsok pedig 6 elemű lefogó ponthalmazt alkotnak. (3 pont)
Megmutatjuk, hogy a megadott párosítás maximális, a megadott lefogó ponthalmaz pedig minimális. Az előadásról tudjuk, hogy bármely G gráfra $\nu(G) \leq \tau(G)$ teljesül. (1 pont)
A 6 élű párosítás igazolja, hogy $\nu(G) \geq 6$, (1 pont)
a 6 csúcsú lefogó ponthalmaz pedig igazolja, hogy $\tau(G) \leq 6$. (1 pont)
Így $6 \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq 6$, ami csak úgy teljesülhet, ha mindenütt egyenlőség áll. (1 pont)
$\nu(G) = 6$ igazolja a párosításunk maximalitását, $\tau(G) = 6$ pedig a lefogó ponthalmazunk minimalitását. (1 pont)



4. Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfot *teljes páros gráfnak* nevezünk, ha A minden csúcsa össze van kötve B minden csúcsával (egy éllel). Hány különböző 101 csúcsú teljes páros gráf létezik, melynek van Euler-sétája? (Két gráfot akkor tekintünk különbözőnek, ha nem izomorfak.)

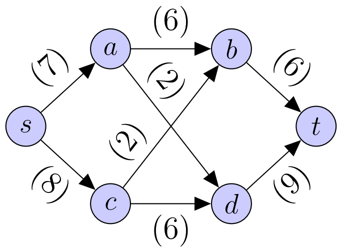
* * * * *

Jelöljük $K_{a,b}$-vel azt a teljes páros gráfot, melynek kisebbik (nem nagyobbik) osztályában a, a másik osztályában b csúcs szerepel. Megmutatjuk, hogy a 101 csúcsú teljes páros gráfok közül $K_{0,101}$ és $K_{2,99}$ rendelkezik Euler-sétával, a többiek pedig nem. (Ne vonjunk le pontot a $K_{0,101}$ hiányáért.) (1 pont)
$K_{0,101}$-nek nincs éle, így az üres élhalmaz Euler-sétája lesz. (0 pont)
Minden más $K_{a,b}$ összefüggő, hiszen bármely két (x és y) csúcs közt van út. (1 pont)
Valóban, ha $x \in A$ és $y \in B$, akkor él fut x és y között, ha pedig $x, y \in A$ vagy $x, y \in B$, akkor van közös szomszédjuk. (2 pont)
Ilyenkor tehát a tanult tétel szerint elég a fokszámok paritását vizsgálni. Az a és b számok közül pontosan egy páratlan, hiszen az összegük páratlan. (2 pont)
Ha a páratlan, akkor $K_{a,b}$-ben b darab páratlan fokú csúcs lesz, ha pedig b páratlan, akkor a darab. (1 pont)
Euler tétele szerint egy összefüggő gráfban akkor és csak akkor van Euler-séta, ha a páratlan

fokú csúcsok száma legfeljebb 2. (1 pont)
Ez esetünkben pontosan $a = 2$ mellett teljesül, hiszen ha a ennél nagyobb páros szám lenne, akkor kettőnél több páratlan fokú csúcs lenne A-ban, (1 pont)
míg ha a 2-nél nagyobb páratlan szám lenne, akkor B-ben lenne kettőnél több páratlan fokú csúcs. (1 pont)

A 0 pontos megállapításért adhatunk 1 pontot olyan megoldóknak, akik ezzel nem lépik túl a 10 pontot.

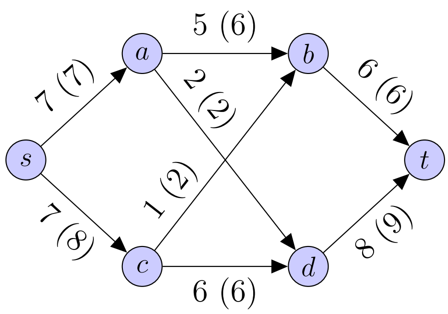
5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot s-ből t-be és egy minimális $s-t$ vágást.



* * * * *

Az alábbi ábrán egy 14 értékű folyam látható. (2 pont)
Szigorúan véve indokolni kéne, hogy az ábrán csakugyan folyam látható (vagyis kéne írni arról, hogy miért teljesülnek a folyamhoz szükséges feltételek), sőt azt is, hogy 14 az értéke, de ezek hiányáért ne vonjunk le pontot. Ha a dolgozatban folyamként megadott ábra nem folyamot ábrázol, akkor el kell dönteni, hogy elírásról vagy elvi hibáról van-e szó. Ha meggyőző bizonyíték van rá, hogy elírás történt, akkor kevés (pl. 1) pontot vonjunk le, ellenkező esetben viszont egyáltalán nem jár pont erre a részre.
Az $\{s, a, b, c\}$ vágás kapacitása 14, (2 pont)
mivel a vágásból kimutató éleknek ennyi az összkapacitása. (1 pont)
Az előadáson tanultak szerint egyetlen vágás kapacitása sem lehet kisebb, mint egy tetszőleges folyam értéke, (3 pont)
így bármely vágás kapacitása legalább 14 kell legyen, tehát $\{s, a, b, c\}$ minimális vágás (1 pont)
és bármely folyam értéke legfeljebb 14, tehát az ábrán megadott folyam maximális. (1 pont)

Az utolsó 5 pont annak jár, aki érdemben indokolja, hogy a megadott folyam maximális és a megadott vágás minimális. Ez persze történhet máshogy is, mint a fenti megoldásban (pl. a javítóutas algoritmus futtatásával, hivatkozva arra, hogy az tudottan maximális folyamot talál, illetzve annak a leírásával, hogy az utolsó segédgráfban mely pontok érhetők el s-ből), de üres frázisok, mint pl. „a Ford-Fulkerson tétel miatt” nem érnek pontot. Aki a javítóutas algoritmust futtatja, annak természetesen nem kell belátnia, hogy folyamot kapott és azt sem, hogy annak értéke 14, hiszen ezek következnek az előadáson tanultakból.



6*. Egy 100×100-as sakktáblán kijelölünk 30 mezőt úgy, hogy összefüggő területet alkossanak, vagyis bármely kijelölt mezőből el lehessen jutni bármelyik másikba úgy, hogy oldalszomszédos kijelölt mezőkre léphetünk át (akárhányszor). Mutassuk meg, hogy ekkor a kijelölt mezőkön mindig el lehet helyezni 8 darab 1×2-es dominót átfedés nélkül úgy, hogy minden dominó a sakktábla két szomszédos mezőjét fedi le.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Legyenek egy G gráf csúcsai a kijelölt mezők, két csúcsot kössünk össze, ha a mezők él mentén szomszédosak. A feltétel szerint ekkor G összefüggő, (1 pont)
tehát a tanultak szerint legalább 29 éle van. (1 pont)
G páros gráf, mivel a sakktábla mezőinek fekete-fehér színezése G egy jó 2-színezését adja. (2 pont)
Vegyük észre, hogy a 2 mezőt fedő 1×2-es dominók épp G éleinek felelnek meg, (1 pont)
a dominók átfedés nélküli elhelyezése pedig olyan éleknek, melyeknek nincs közös csúcsa, vagyis olyanoknak, melyek párosítást alkotnak. (1 pont)
A feladat tehát nem más, mint annak igazolása, hogy $\nu(G) \geq 8$. Mivel G páros gráf, $\nu(G) = \tau(G)$, tehát elég azt belátnunk, hogy $\tau(G) \geq 8$. (1 pont)
Világos, hogy G-ben minden csúcs foka legfeljebb 4 (hiszen minden mezőnek csak 4 szomszédja lehet él mentén), (1 pont)
így egy legfeljebb 7 csúcsú ponthalmaz csak 28 élet tud lefogni. (1 pont)
Mivel G-nek 29 éle van, csakugyan minden lefogó ponthalmaza legalább 8 elemű; épp ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
2021. május 18.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. A zárthelyiben egyes feladatoknak több (lényegesen nem eltérő) verziója is megjelent. Az útmutató minden feladat egy verziójához leírja (legalább) egy megoldásának főbb gondolatait és közli az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, ami egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amiből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, bizonyítás nélkül azonban csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet.

1. A G egyszerű gráf csúcsai legyenek egy 10 elemű halmaz 4 elemű részhalmazai. Két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. Hány éle van G-nek? (Adjuk meg a végeredmény számszerű értékét is. Ennek kiszámításához számológépet használni szabad ugyan, de a megoldásból derüljön ki, hogy a végeredményt hogyan lehetne megkapni egy olyan számológéppel, ami csak a négy alapműveletet ismeri.)

* * * * *

G csúcsainak száma $\binom{10}{4}$ (az $\binom{n}{k}$ definíciója szerint), (1 pont)
aminek az értéke a tanultak szerint $\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!} = 210$. (1 pont)
G-ben minden csúcs foka $\binom{6}{4} =$ (1 pont)
$= \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4!} = 15$, (1 pont)
mert ha G csúcsai a H alaphalmaz négy elemű részhalmazai, akkor minden $X \subset H$ csúcs a hat elemű $H \setminus X$ halmaz négy elemű részhalmazaival szomszédos. (3 pont)
A tanultak szerint G élszáma a csúcsok fokszámösszegének a fele, (1 pont)
vagyis $\frac{210\cdot 15}{2} = 1575$. (2 pont)
Bár a feladat szövege a négy alapművelet használatát engedélyezi, ne vonjunk le pontot a faktoriális jelölés használatáért.

2. A tíz csúcsú G teljes gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Minden $1 \le i < j \le 10$ esetén az $\{i, j\}$ él súlya legyen $\left\lfloor \frac{2j-i}{3} \right\rfloor$ (ahol a $\lfloor\ \rfloor$ alsó egészrészt jelöl). Adjunk meg G-ben egy minimális összsúlyú feszítőfát.

* * * * *

Kruskal algoritmusát fogjuk futtatni, a tanultak szerint ugyanis ez minimális összsúlyú feszítőfát ad. (Ez a pontszám akkor jár, ha a megoldó – akár a név említése nélkül – jelzi, hogy ezt az algoritmust fogja futtatni és nyoma van annak, hogy a futtatást elkezdi.) (2 pont)
Az eljárás először három 1 súlyú élt választ, például az $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ és $\{3, 4\}$ éleket. (1 pont)
Valóban, mivel minden élsúly pozitív egész és ez a három él nem alkot kört, ezért ezek kiválasztása megfelel az algoritmus helyes működésének. (1 pont)
Ekkor a megmaradt egyetlen 1 súlyú élt, az $\{1, 3\}$-at az eljárás nem választja ki, mert kört alkotna a korábbiakkal. (1 pont)
Így a 2 súlyú $\{4, 5\}$, $\{5, 6\}$ és $\{6, 7\}$ élek kiválasztásával folytatódhat az algoritmus végrehajtása (hiszen ezzel a körmentességet fenntartjuk). (1 pont)
Bár vannak még 2 súlyú élek, de ezek mind az $\{1, 2, \ldots, 7\}$ halmazon belül futnak, így az eljárás ezeket nem választja ki (hiszen ezzel kört hozna létre). (1 pont)
Valóban, ha $j \geq 8$, akkor $i < j$ miatt $2j - i \geq 2j - (j - 1) = j + 1 \geq 9$, így az $\{i, j\}$ él súlya már legalább 3. (1 pont)
Ezért az algoritmus futtatása befejeződhet például a 3 súlyú $\{7, 8\}$, $\{8, 9\}$ és $\{9, 10\}$ élek kiválasztásával. (1 pont)
Mivel ezzel az élek száma elérte a csúcsszám mínusz 1-et, az algoritmus futása itt megáll (1 pont)
és a kapott feszítőfa az $1, 2, \ldots, 10$ csúcsokon ebben a sorrendben végighaladó Hamilton-út.(0 pont)
Természetesen más helyes, minimális (vagyis 18) összsúlyú feszítőfa is megadható. Annak indoklása, hogy háromnál több 2 súlyú élt az eljárás nem választhat ki, a fenti rövid számolás helyett a 2 súlyú élek felsorolásával is történhet: ezek a fenti megoldásban az eljárás által kiválasztottakon kívül a $\{2, 5\}$, a $\{3, 5\}$ és a $\{4, 6\}$.

3. Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfot teljes páros gráfnak nevezünk, ha A minden csúcsa össze van kötve B minden csúcsával (egy éllel). Hány különböző 100 csúcsú teljes páros gráf létezik, aminek van Hamilton-köre? (Két gráfot akkor tekintünk különbözőnek, ha nem izomorfak.)

* * * * *

Jelöljük $K_{a,b}$-vel azt a teljes páros gráfot, aminek a kisebbik (nem nagyobbik) osztálya a, a másik osztálya b csúcsú.
Ha $a < b$, akkor a kisebbik osztály a darab csúcsát a gráfból törölve a kapott gráfnak a-nál több komponense lesz. (1 pont)
Valóban, ezzel a másik osztály megmaradó b csúcsa mind izolált pont lesz, így ezek mind külön komponenst alkotnak. (1 pont)
Így a Hamilton-kör létezésére tanult szükséges feltétel sérül, vagyis az $a < b$ esetben $K_{a,b}$-nek nincs Hamilton-köre. (3 pont)
Ha viszont $a = b = 50$, akkor $K_{50,50}$-ben könnyű megadni egy Hamilton-kört: ha $u_1, u_2, \ldots, u_{50}$ az egyik és $v_1, v_2, \ldots, v_{50}$ a másik osztály csúcsai, akkor az $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_{50}, v_{50}, u_1$ sorrendben bejárva a csúcsokat Hamilton-kört kapunk. (4 pont)
Így (izomorfiától eltekintve) egyetlen olyan, 100 csúcsú teljes páros gráf létezik, amiben van Hamilton-kör: a $K_{50,50}$. (1 pont)
Azt, hogy $K_{50,50}$-ben van Hamilton-kör, a Dirac-tétellel is lehet indokolni (hiszen a gráf egyszerű, a csúcsok száma 100 és minden pont foka 50).

4. A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_7\}$. Minden $1 \leq i \leq 7$ és $1 \leq j \leq 7$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg egy maximális párosítást és egy minimális lefogó ponthalmazt G-ben.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Például $M = \Big\{\{a_1, b_2\}, \{a_2, b_4\}, \{a_3, b_1\}, \{a_4, b_7\}, \{a_5, b_3\}, \{a_6, b_5\}\Big\}$ 6 élű párosítás G-ben (hiszen ezek közül semelyik két élnek nincs közös végpontja). (2 pont)
Az $X = \{a_2, a_3, a_5, b_2, b_5, b_7\}$ halmaz lefogó ponthalmaz G-ben (ez a feladatban megadott mátrixból könnyen ellenőrizhető: a megfelelő sorok és oszlopok együtt minden 1-est tartalmaznak). (3 pont)
M létezése bizonyítja a $\nu(G) \geq 6$ állítást, X létezése pedig a $\tau(G) \leq 6$ állítást. (1+1 pont)
Így a tanult $\nu(G) \leq \tau(G)$ állítás miatt G-re $6 \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq 6$, amiből $\nu(G) = \tau(G) = 6$.(2 pont)
Ezért a megadott M párosítás maximális és a megadott X lefogó ponthalmaz minimális. (1 pont)
A $\nu(G) \leq \tau(G)$ állítás helyett lehet (bár szükségtelen) Kőnig tételére is hivatkozni, ami szerint páros gráfban $\nu(G) = \tau(G)$. A fenti pontozás szerinti utolsó 5 pont viszont csak annak jár, aki meggyőzően és világosan indokolja, hogy a megadott párosítás maximális és a megadott lefogó ponthalmaz minimális. (Üres frázisok, mint például „Kőnig tétele miatt” nem érnek pontot.) Megjegyezzük, hogy a maximális párosítást és a minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult javítóutas algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges ennek a lépéseit dokumentálni. Azonban a párosítás maximalitásának és a lefogó ponthalmaz minimalitásának az indoklását is lehet az algoritmusra alapozni: ha (meggyőzően) megmutatjuk, hogy az adott párosításra nézve nincs javítóút, akkor a tanultak szerint az maximális; ha pedig ebben az esetben X az A-beli, a párosítás által lefedetlen csúcsokból alternáló úton elérhető B-beliekből és az alternáló úton el nem érhető A-beliekből áll, akkor az a tanultak szerint minimális méretű lefogó ponthalmaz.

5. A G gráf legyen egy 6 csúcsú (és 5 élű) út komplementere. Határozzuk meg G-nek a $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

* * * * *

G-ben a maximális fokszám $\Delta(G) = 4$ (mert G-nek két 4 fokú és négy 3 fokú csúcsa van). (2 pont)
Ezért a tanultak szerint $\chi_e(G) \geq \Delta(G) = 4$. (2 pont)
G élei (könnyen) megszínezhetők 4 színnel; egy helyes színezésért járó pontszám: (4 pont)
Mivel G élei a fentiek szerint 4 színnel megszínezhetők, de kevesebbel nem, ezért $\chi_e(G) = 4$.(2 pont)
G helyes felrajzolásáért megadható a pontozás szerinti első 2 pontból 1.

6*. Legyen adott egy G irányított gráf, az $s, t \in V(G)$ termelő, illetve fogyasztó csúcsok, a $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény, valamint egy e él, amire $c(e) > 0$. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha van olyan minimális kapacitású st-vágás, amiből e kilép, akkor minden f maximális értékű folyam esetén $f(e) = c(e)$.

b) Ha minden f maximális értékű folyam esetén $f(e) = c(e)$, akkor van olyan minimális kapacitású st-vágás, amiből e kilép.
(Az $e = (u, v)$ él *kilép* az X vágásból, ha $u \in X$ és $v \notin X$.)

* * * * *

a) Az állítás igaz. Legyen ugyanis X egy minimális kapacitású vágás és f egy maximális értékű folyam. (0 pont)
Ekkor a tanultak szerint $m_f = \sum\{f(e) : e \text{ kilép } X\text{-ből}\} - \sum\{f(e) : e \text{ belép } X\text{-be}\} \leq$ (1 pont)
$\leq \sum\{c(e) : e \text{ kilép } X\text{-ből}\} - \sum\{0 : e \text{ belép } X\text{-be}\}$, ahol a becslésekhez a folyam definíciójából a $0 \leq f(e) \leq c(e)$ feltételeket használtuk. (1 pont)
A jobb oldalon az X vágás $c(X)$ kapacitását kaptuk, amiről a Ford-Fulkerson tétel miatt tudjuk, hogy m_f-fel egyenlő. Ezért az X-ből kilépő élekre az $f(e) \leq c(e)$ becslések valóban mind egyenlőséggel kell teljesüljenek. (1 pont)
Ha egy megoldás a szemléletre építve indokolja az állítás igaz voltát, az – a szöveg meggyőző erejétől függően – ezért legföljebb 2 pontot kaphat. Például egy ilyen, nem precíz, de 2 pontot érő szöveg lehet a következő: „Ha e kilép az X minimális kapacitású vágásból és $f(e) < c(e)$, akkor az X vágásból kevesebb termék jut át $(V(G) \setminus X)$-be, mint X kapacitása. Mivel X kapacitása a Ford-Fulkerson tétel miatt egyenlő a maximális folyam értékével, ezért ilyenkor f nem lehet maximális folyam.”

b) Ez az állítás is igaz. Tegyük fel ugyanis indirekt, hogy e nem lép ki egyetlen minimális kapacitású vágásból sem. (0 pont)
Legyen a vágások kapacitásai közül a legkisebbnek az értéke M. Ha a hálózatban minden vágás M kapacitású, akkor az állítás nyilván igaz (mert minden olyan vágás megfelel, amiből e kilép).(1 pont)
Ha viszont létezik M-nél nagyobb kapacitású vágás is, akkor ezek között a legkisebbek kapacitása legyen $M + \delta$, ahol $\delta > 0$. (1 pont)
Az M-nél nagyobb kapacitású vágások között valóban van legkisebb kapacitású, mert a vágások száma véges. (0 pont)
Csökkentsük most le e kapacitását: legyen az új értéke $c'(e) = \max\{c(e) - \delta, 0\}$ (és a többi él kapacitása legyen változatlan). (1 pont)
Ekkor $c(e) > 0$ és $\delta > 0$ miatt $c'(e) < c(e)$ valóban igaz. (0 pont)
$c(e)$ csökkenése a vágások közül azoknak a kapacitását érinti, amikből e kilép. Mivel ezek között nem volt M kapacitású, ezért a minimális vágás kapacitása továbbra is M lesz (hiszen az érintett vágások esetében is a csökkenés mértéke legföljebb δ). (1 pont)
Így a Ford-Fulkerson tétel miatt a maximális folyam értéke továbbra is M, vagyis létezik a hálózatban (a megváltozott kapacitásfüggvényre is) egy M értékű f folyam. (1 pont)
Ennek az f folyamnak az értéke tehát maximális az eredeti kapacitásfüggvényre nézve is, továbbá $f(e) \leq c'(e) < c(e)$. (1 pont)
Ez tehát ellentmond a megmutatandó állítás feltételének és ezzel bizonyítja az állítást. (1 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.
Aláíráspótló zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
a koronavírus járvány idején zajló távoktatáshoz
2021. május 27.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

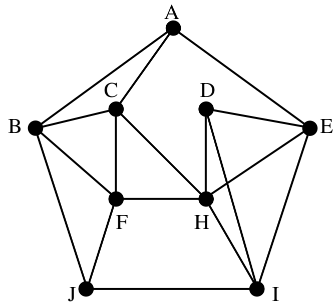
Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Egy 20 fős önkormányzati képviselőtestület a tagjai közül 5 fős bizottságot választ a községi Töpörtyű Napok eseménysorozatának megszervezésére. A bizottság tagjai közül néhányan a polgármesteri keretből kiemelt díjazásban részesülnek; erről a polgármester saját hatáskörben dönt, így a kiemelten díjazottak száma 0 és 5 között bármennyi lehet. Hányféleképpen alakulhat meg a bizottság (ha két esetet nem csak akkor tekintünk különbözőnek, ha a bizottság tagsága más, hanem akkor is, ha nem ugyanazok a kiemelten díjazottak)? (Adjuk meg a végeredmény számszerű értékét is. Ennek kiszámításához számológépet használni szabad ugyan, de a megoldásból derüljön ki, hogy a végeredményt hogyan lehetne megkapni egy olyan számológéppel, ami csak a négy alapműveletet ismeri.)

* * * * *

A bizottság tagjait $\binom{20}{5}$-féleképpen választhatjuk ki (az $\binom{n}{k}$ definíciója szerint), (2 pont)
aminek az értéke a tanultak szerint $\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16}{5!} = 15\ 504$. (2 pont)
Ezután a bizottság mind az öt tagjára kétféleképpen dönthetünk arról, hogy kiemelt díjazásban részesüljön-e. Így (egy adott bizottságra) a lehetőségek száma $2^5 = 32$, (2 pont)
hiszen az elsőtől az ötödikig haladva bárhogyan is döntöttünk a korábbi tagokról, az újabb tagról való döntésünk megkétszerezi az addigi lehetőségek számát (vagy az ismétléses variációról tanultakra hivatkozással). (1 pont)
Mivel az először mondott $\binom{20}{5}$ lehetőség mindegyike 2^5-féleképp folytatható a másodiknak mondott választással, ezért az összes lehetőségek száma $\binom{20}{5}\cdot 2^5 =$ (2 pont)
$= 15\ 504\cdot 32 = 496\ 128$. (1 pont)
Bár a feladat szövege a négy alapművelet használatát engedélyezi, ne vonjunk le pontot a faktoriális jelölés használatáért. Ha azonban valaki nem számolja ki a (részeredmények, illetve a) végeredmény kért értékeit, a vonatkozó pontokat ne kapja meg.

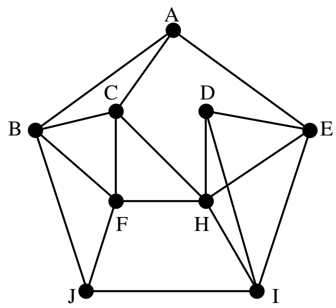
2. A jobbra látható G gráf mely e éleire teljesül, hogy G-ben van olyan séta, ami e-n kívül a gráf mindegyik élét tartalmazza? Minden ilyen e élre adjunk is meg egy ilyen sétát.



* * * * *

A feladat kérdése az, hogy mely e élekre van Euler-séta a G-ből az e törlésével kapott gráfban. (2 pont)
Mivel az Euler-séta létezésének szükséges feltétele, hogy a gráfban legföljebb 2 páratlan fokú csúcs legyen, ezért úgy kell egy élt elhagynunk, hogy ez teljesüljön. (1 pont)
G-nek négy páratlan fokú pontja van: A, D, H és J. Mivel egy e él elhagyása e végpontjai fokának a paritását változtatja meg, ezért olyan e élt kell elhagynunk, ami ezek között a csúcsok között fut (hogy ezáltal a páratlan fokú csúcsok száma 2-re csökkenjen). (1 pont)
Mivel eközött a négy csúcs között egyedül D és H szomszédosak, ezért az egyetlen lehetőség az $e = \{D, H\}$ él elhagyása. (2 pont)
A $\{D, H\}$ él elhagyása után kapott gráfban valóban van Euler-séta; erre számtalan lehetőség van, egy ilyennek a megadásárt járó pontszám: (4 pont)
Ha valaki nem ad meg egy konkrét Euler-sétát, akkor az utolsó 4 pontból 1-et megkaphat azért, ha a tanult tételre való hivatkozva állítja annak a létét: mivel a kapott gráf összefüggő és pontosan 2 páratlan fokú csúcsa van, ezért tartalmaz Euler-sétát. (Az összefüggőségi feltétel említésének a hiánya esetén azonban ez az 1 pont már nem adható meg.) Ettől függetlenül adható az utolsó 4 pontból 1 annak a megállapításáért is, hogy a keresett Euler-séta végpontjai A és J kell legyenek (mert ezek a kapott gráf páratlan fokú csúcsai). Eközül a kétszer 1 pont közül akár mindkettő is megadható (ha mindkét megállapítás szerepel a dolgozatban) – de természetesen csak a pontozás szerinti utolsó 4 pont helyett, nem pedig azokon felül.

3. Határozzuk meg jobbra látható G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.



* * * * *

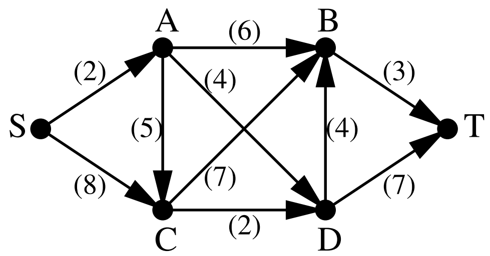
G-ben a D, E, H és I csúcsok klikket alkotnak, (2 pont)
ezért G maximális klikkmérete $\omega(G) \geq 4$. (2 pont)
G csúcsai megszínezhetők négy színnel. Erre rengeteg jó lehetőség van, egy ilyennek a megadásáért járó pontszám: (3 pont)
Következésképp $\chi(G) \leq 4$. (1 pont)
Ezekből és a tanult $\omega(G) \leq \chi(G)$ összefüggésből $4 \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq 4$. Így $\chi(G) = 4$. (2 pont)
A négy csúcsú klikkből és a négy színnel való színezésből máshogyan is következtethetünk arra, hogy $\chi(G) = 4$: az előbbiből következik, hogy négynél kevesebb színnel G csúcsai nem megszínezhetők (mert már a klikk csúcsaihoz is szükséges ennyi szín), így a színezés bizonyítja, hogy a színek lehetséges minimális száma (vagyis $\chi(G)$ értéke) négy.

4. A 20 csúcsú G gráf élei közül bárhogyan is választunk ki 8-at, G-nek mindig van olyan csúcsa, amire legalább kettő illeszkedik a kiválasztott élek közül. Mutassuk meg, hogy ekkor bárhogyan választunk ki G élei közül 12-t, G-nek mindig van olyan csúcsa, amire egy sem illeszkedik a kiválasztott élek közül.

* * * * *

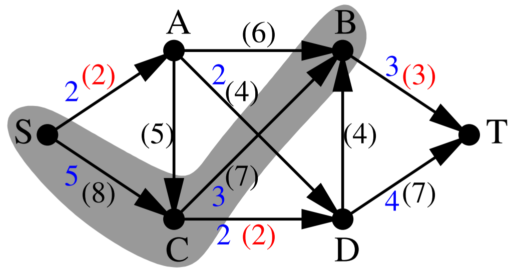
A feladatban szereplő, G-re vonatkozó állítás azt jelenti, hogy G-ben a független élek maximális száma $\nu(G) \leq 7$. (1 pont)
Valóban, $\nu(G) \geq 8$ éppen azt jelentené, hogy létezik G-ben 8 élű párosítás – vagyis 8 olyan él, amik közül minden csúcsra legföljebb egy illeszkedik. (3 pont)
A bizonyítandó állítás azt jelenti, hogy a G-beli minimális lefogó élhalmaz mérete $\varrho(G) \geq 13$.(1 pont)
Valóban, $\varrho(G) \leq 12$ éppen azt jelentené, hogy megadható G-ben 12 él úgy, hogy közülük minden csúcsra illeszkedik legalább egy. (3 pont)
Így a bizonyítandó állítás következik Gallai tételéből: $\nu(G) + \varrho(G) = 20$ miatt a $\nu(G) \leq 7$ feltételből valóban adódik, hogy $\varrho(G) \geq 13$. (2 pont)
A fenti megoldás csak akkor helyes, ha G-nek nincs izolált pontja (különben a gráfban nincs is lefogó élhalmaz és így Gallai tétele sem alkalmazható). Ha G-nek mégis van izolált pontja, akkor viszont a bizonyítandó állítás magától értetődően igaz: akárhányat is választunk G élei közül, egy izolált pontra teljesülni fog, hogy rá egy sem illeszkedik ezek közül. (0 pont)
Ha egy megoldó kitér arra az esetre, amikor G-nek van izolált pontja (és erre belátja az állítást), akkor ezért legföljebb 2 pontot kaphat – de természetesen csak akkor, ha ezzel a feladatra kapott összpontszáma nem haladja meg a 10-et.

5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot S-ből T-be és egy minimális ST-vágást.



* * * * *

Az alábbi ábrán látható folyam értéke 7. (2 pont)
Az ugyancsak az ábrán látható $X = \{S, C, B\}$ vágás kapacitása (vagyis az X-ből kilépő élek összkapacitása, az ábrán pirossal) szintén 7. (3 pont)
Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás kapacitása, (1 pont)
ezért a 7 kapacitású vágás bizonyítja, hogy a 7 értékű folyam maximális (2 pont)
és a 7 értékű folyam bizonyítja, hogy a 7 kapacitású vágás minimális. (2 pont)
Az utolsó 5 pont annak jár, aki érdemben indokolja, hogy a megadott folyam maximális és a megadott vágás minimális. Ez persze történhet máshogy is, mint a fenti megoldásban (például a javítóutas algoritmus futtatásával, hivatkozva arra, hogy a tanultak szerint az maximális folyamot talál, illetve annak a leírásával, hogy az utolsó segédgráfban mely pontok érhetők el s-ből), de üres frázisok, mint például „a Ford-Fulkerson tétel miatt” nem érnek pontot.



6*. Egy G összefüggő gráf u és v csúcsainak *távolsága* alatt az u és v közötti legrövidebb út hosszát (vagyis éleinek a számát) értjük. A G gráf *átmérője* alatt a G-beli csúcspárok távolságának maximumát (vagyis a legtávolabbi csúcsok távolságát) értjük. Mutassuk meg, hogy ha a 24 csúcsú G egyszerű gráfban az egyik csúcs foka 5, az összes többi csúcs foka pedig 3, akkor G átmérője legalább 4.

* * * * *

Jelölje az egyetlen 5 fokú csúcsot v. Indítsuk el v-ből a BFS algoritmust. Ekkor az 1 távolságra lévő csúcsok száma 5. Mivel ezeknek a foka 3 és az egyik szomszédjuk v, ezért a v-től 2 távolságra lévő csúcsok száma legföljebb 10. (1 pont)
Ezzel a BFS bejárás eddig legföljebb $1 + 5 + 10 = 16 < 24$ csúcsot járt be, így kell legyen még bejáratlan csúcs; legyen ezek egyike s. Ekkor tehát v és s távolsága legalább 3. (2 pont)
Indítsunk most egy új BFS bejárást s-ből. Ekkor az 1 távolságra lévő csúcsok száma 3. Mivel ezeknek a foka is 3 (mert v-nek az s-től való távolsága legalább 3) és az egyik szomszédjuk s, ezért az s-től 2 távolságra lévő csúcsok száma legföljebb 6. (2 pont)
Hasonlóan folytatva: az s-től 2 távolságra lévő csúcsok foka is 3 és az egyik szomszédjuk egy s-től 1 távolságra lévő csúcs, ezért az s-től 3 távolságra lévő csúcsok száma legföljebb 12. (2 pont)
Eddig tehát az s-től indított BFS eljárás legföljebb $1 + 3 + 6 + 12 = 22 < 24$ csúcsot járt be. Így kell legyen olyan csúcs, aminek az s-től való távolsága 4, (2 pont)
mert G összefüggő, így minden csúcsnak van (véges) távolsága s-től. (0 pont)
Mivel tehát van olyan csúcspár, amiknek a távolsága 4, ezért a G-beli csúcspárok közötti maximális távolság – vagyis G átmérője – valóban legalább 4. (1 pont)