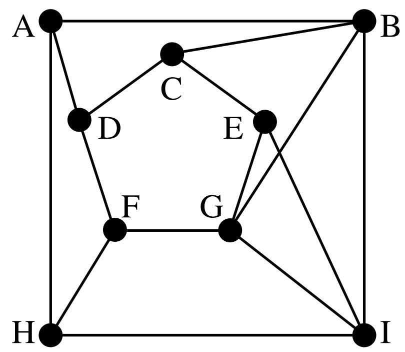
Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2016. március 24.

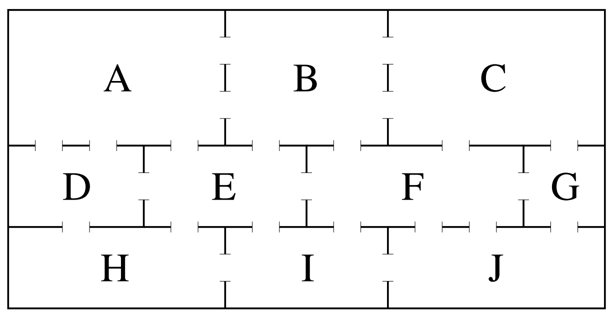
1. Egy BME hallgató Neptun-kódja egy olyan, 6 karakterből álló sorozat, amelynek minden tagja az angol ábécé 26 betűjének egyike, vagy a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyek valamelyike. Hány olyan Neptun-kód létezik, ami legföljebb két számjegyet tartalmaz? (A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet* ismeri.)

2. A 6 csúcsú G gráf hurokélt nem, de többszörös éleket tartalmazhat. Tudjuk, hogy G bármely két csúcsának a foka különböző. Minimálisan hány éle van G-nek? (Azaz: milyen k egészre teljesül, hogy létezik a feltételeknek megfelelő k élű gráf, de k-nál kevesebb élű már nem?)

3. Síkbarajzolható-e a jobbra látható gráf? Ha igen, rajzoljuk le a síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.



4. Az ábrán egy királyi palota alaprajza látható. A király minden reggel az A jelű lakosztályából sétára indul a palotában. A fejébe veszi, hogy séta közben minden ajtón pontosan egyszer szeretne átmenni. Ha ez sikerülne neki, a séta végpontját jelölné ki trónteremnek. De mivel sosem sikerül, az udvari bölcs azt tanácsolja, hogy falaztassa be az egyik ajtót. Van-e a palotában olyan ajtó, aminek a befalazása után már létezik a király vágyainak megfelelő séta? Ha igen, melyik szobából lehet a trónterem? (Az ábra a befalazás előtti állapotot mutatja.)



5. A G egyszerű, síkbarajzolható gráfban minden pont foka legalább 4 és a pontosan 4 fokú csúcsok száma 5. Mutassuk meg, hogy G-ben nincs Euler-kör.

6. A 201 csúcsú G egyszerű gráfban a v csúcs kivételével minden pont foka legalább 101. A v csúcsról csak annyit tudunk, hogy nem izolált pont (vagyis a foka legalább 1). Mutassuk meg, hogy G-ben van Hamilton-út.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc.

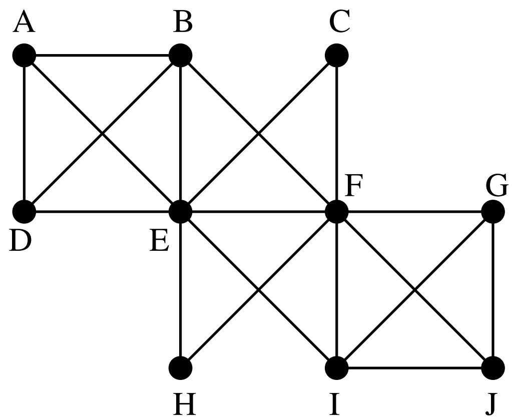
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2016. április 28.

1. A 12 csúcsú G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{\text{január}, \text{február}, \ldots, \text{december}\}$ (vagyis G csúcsai a hónapok nevei). Két csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a két megfelelő hónap nevének utolsó betűje különböző vagy a két hónap napban mért hossza különböző (vagy esetleg mindkettő). (Így például G-ben a január szomszédos a februárral, a márciussal és az áprilissal is, de a decemberrel már nem.) Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát. (A februárt tekintsük 28 naposnak.)

2. A 8 csúcsú teljes gráfnak hagyjuk el 4, egy csúcsra illeszkedő élét. Intervallumgráf-e a kapott gráf?

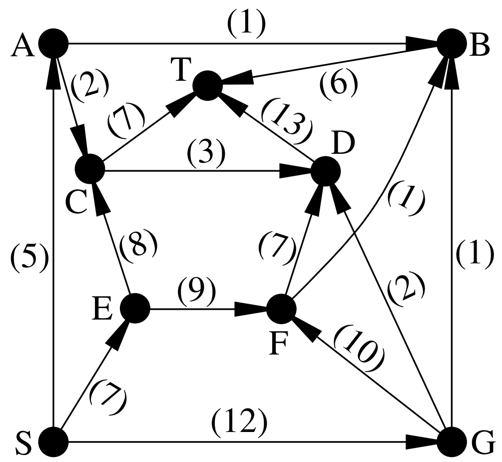
3. Használjuk Tutte tételét annak igazolására, hogy az alábbi gráfban nincs teljes párosítás. (Tutte tétele arra vonatkozó szükséges és elégséges feltételt ad, hogy egy tetszőleges gráf tartalmaz-e teljes párosítást.)



4. A G egyszerű gráf v csúcsának foka 2, minden más pont foka 3. Határozzuk meg a G gráf $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

5. A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{101}\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{101}\}$. Minden $1 \le i \le 101$ és $1 \le j \le 101$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha $i \cdot j$ páros. Határozzuk meg $\nu(G)$, a független élek maximális számának, valamit $\varrho(G)$, a lefogó élek minimális számának értékét és adjunk meg G-ben egy maximális független élhalmazt és egy minimális lefogó élhalmazt.

6. Adjunk meg a jobbra látható hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be).



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

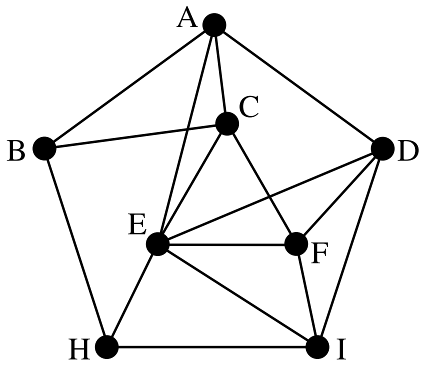
2016. május 9.

1. Egy fagylaltozóban 26 féle fagylaltot árulnak. Egy vendég négy kehelynyi fagylaltot rendel, mindet sajátmagának. Azt kéri a felszolgálótól, hogy mind a négy kehelyben három gombóc fagylalt legyen és egy-egy kelyhen belül mindig csupa különböző fajta. Az nem zavarja, ha ugyanazt a fajta fagylaltot különböző kelyhekben akár többször is megkapja, de azt határozottan kéri, hogy azért semelyik két kehely tartalma ne legyen teljesen azonos. Hányféleképpen szolgálhatják ki a vendéget? (A kelyheken belül a gombócok sorrendje nyilván közömbös – és mivel mind a négy kelyhet ugyanaz a vendég kapja, ezért a kelyhek sorrendje sem számít. Azt viszont különböző esetnek tekintjük, ha ugyanazok a fajta fagylaltok máshogyan vannak szétosztva a négy kehelyben.)
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet* ismeri.)

2. Minimálisan hány éle kell legyen egy olyan 10 csúcsú egyszerű gráfnak, amelynek van 3 darab 9 fokú csúcsa? (Azaz: milyen k egészre teljesül, hogy létezik a feltételeknek megfelelő k élű gráf, de k-nál kevesebb élű már nem?)

3. Van-e $K_{10,10}$-nek, a „10 ház, 10 kút” gráfnak olyan feszítőfája, amelyben minden csúcs foka páratlan? (A $K_{10,10}$ gráfnak tehát 20 csúcsa van és ha ezek közül 10-et háznak, a maradék 10-et kútnak nevezzük, akkor a gráfban minden ház minden kúttal össze van kötve egy éllel, de a gráfnak további éle nincs.)

4. Síkbarajzolható-e a jobbra látható gráf? Ha igen, rajzoljuk le a síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.



5. a) Van-e Euler-kör a jobbra látható gráfban? Ha igen, adjunk meg egyet; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.

b) Van-e Euler-út a jobbra látható gráfban? Ha igen, adjunk meg egyet; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.

6. A (8×8-as) sakktábláról válasszunk ki találomra k darab mezőt, ahol $k \geq 10$ tetszőleges. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is választottuk a mezőket, azok megszámozhatók 1-től k-ig úgy, hogy ha két kiválasztott mező (él mentén) szomszédos, akkor a sorszámaik különbsége mindig legalább 2.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2016. május 9.

1. A G gráf csúcsai legyenek az 5 hosszúságú bitsorozatok (vagyis csupa 0 és 1 tagokból álló sorozatok). Két bitsorozat akkor legyen szomszédos G-ben, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól. Páros gráf-e a G gráf?

2. A G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G) = \{1, 2, \ldots, 30\}$ halmaz. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha az x és y számok különbsége legalább 7. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.

3. A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Minden $1 \leq i \leq 8$ és $1 \leq j \leq 8$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Határozzuk meg $\nu(G)$, a független élek maximális számának, valamint $\varrho(G)$, a lefogó élek minimális számának értékét és adjunk meg G-ben egy maximális független élhalmazt és egy minimális lefogó élhalmazt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G) = 3$ és G csúcsainak van olyan 3 színnel való színezése, amelyben az egyik színt csak egyetlen csúcs kapja. Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \leq \nu(G) + 1$ (ahol $\nu(G)$ a G-beli független élek maximális számát, $\tau(G)$ a lefogó pontok minimális számát jelöli).

5. A G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G) = \{1, 2, \ldots, 30\}$ halmaz. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és az $x \cdot y$ szorzat osztható 7-tel. Határozzuk meg a G gráf $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

6. Legyen adott egy G irányított gráf, az $s \in V(G)$ rögzített csúcs és a $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény. Tegyük fel, hogy bármely $t \in V(G)$, $t \neq s$ csúcs esetén az s-ből t-be vezető maximális folyam értéke legalább 100 és a t-ből s-be vezető maximális folyam értéke is legalább 100. Mutassuk meg, hogy ekkor bárhogyan választjuk az $u, v \in V(G)$, $u \neq v$ csúcsokat, az u-ból v-be vezető maximális folyam értéke is legalább 100.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Aláíráspótló vizsga — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2016. május 25.

1. Hány olyan, csupa különböző számokból álló, 4 hosszúságú számsorozat készíthető az $1, 2, \ldots, 100$ számokból, amelyekben a sorozat tagjai közül a legnagyobb áll legelöl, a másodiktól kezdve pedig a tagok nagyság szerint növekvő sorrendben következnek? (A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet* ismeri.)

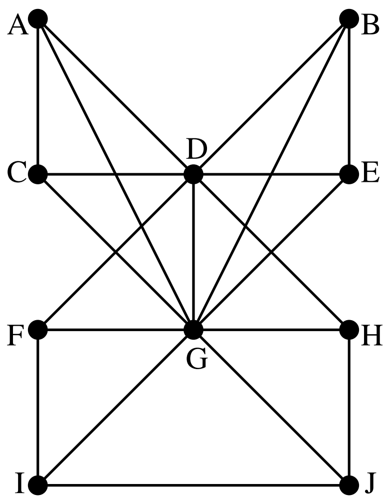
2. Legyen G egyszerű gráf, $v \in V(G)$ pedig a G egy páratlan fokszámú csúcsa. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van olyan út, amelynek egyik végpontja v, a másik végpontja pedig a G egy v-től különböző páratlan fokszámú csúcsa.

3. A G gráf nem tartalmaz $K_{2,3}$-mal, a „2 ház, 3 kút" gráffal topologikusan izomorf részgráfot. Következik-e ebből, hogy G síkbarajzolható? (A $K_{2,3}$ gráfnak tehát 5 csúcsa van és ha ezek közül 2-t háznak, a maradék 3-at kútnak nevezzük, akkor a gráfban minden ház minden kúttal össze van kötve egy éllel, de a gráfnak további éle nincs.)

4. Van-e az alábbi gráfban

a) Hamilton-út;

b) Hamilton-kör?



5. 11 gyerek körjátékozik. Ez abból áll, hogy körbeállnak, egyikük fog egy labdát és átdobja valaki másnak; az illető továbbdobja egy harmadiknak, stb. A szabály az, hogy senki nem dobhatja a labdát sem olyan gyereknek, akinek ő már korábban dobta, sem olyannak, akitől ő már korábban kapta. Továbbá senki nem dobhatja a körben mellette álló két gyereknek sem a labdát. A gyerekek közös célja az, hogy (a szabályok betartásával) minél tovább tartson a játék. Legföljebb hány dobásból állhat a játék?

6. Mutassuk meg, hogy ha $n \geq 8$ egész, akkor az n csúcsú teljes gráf élei megszámozhatók az $1, 2, \ldots$ sorszámokkal úgy, hogy bármely két, közös csúcsra illeszkedő él sorszámának különbsége legalább 2 legyen.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Aláíráspótló vizsga feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2016. május 25.

1. Létezik-e olyan legalább 5 csúcsú páros, egyszerű gráf, amelynek a komplementere is páros gráf?

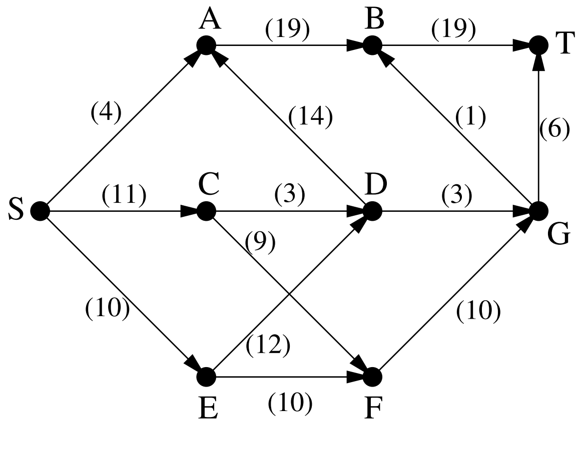
2. A 16 csúcsú G gráf két, közös csúcsot nem tartalmazó 8 pontú körből áll. Határozzuk meg a G komplementerének $\chi(\overline{G})$ kromatikus számát.

3. A (8×8-as) sakktábla mezőire valaki elhelyezett néhány pénzérmét (minden mezőre legföljebb egyet). Tudjuk, hogy a sakktábla minden sorára és oszlopára igaz, hogy az abban lévő pénzérmék tömegének összege 12 grammnál több és 14 grammnál kevesebb. Mutassuk meg, hogy az érmék közül kiválasztható 8 darab úgy, hogy minden sorban és oszlopban pontosan egy kiválasztott érme legyen.

4. A G gráf v csúcsát nevezzük *fontosnak*, ha a v (és a rá illeszkedő élek) elhagyásával kapott G' gráfra $\alpha(G') < \alpha(G)$ teljesül. Legföljebb hány fontos csúcsa lehet egy olyan 100 csúcsú G gráfnak, amelyre $\alpha(G) = 10$? (Más szóval: melyik k számra teljesül, hogy létezik k fontos csúcsot tartalmazó ilyen gráf, de $k+1$ fontos csúcsot tartalmazó már nem?) ($\alpha(G)$ a G-beli független pontok maximális számát jelöli.)

5. A 4 csúcsú teljes gráf minden élét helyettesítsük két párhuzamos éllel, majd a kapott gráf egyik élét osszuk fel egy ponttal. Határozzuk meg a végül kapott (5 csúcsú és 13 élű) G gráf $\chi_e(G)$ élkromatikus számát. (Az él ponttal való felosztása azt jelenti, hogy az $\{u, v\}$ élt helyettesítjük az $\{u, x\}$ és $\{x, v\}$ élekkel, ahol x egy új csúcs.)

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot S-ből T-be.



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2016. március 24.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy BME hallgató Neptun-kódja egy olyan, 6 karakterből álló sorozat, amelynek minden tagja az angol ábécé 26 betűjének egyike, vagy a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyek valamelyike. Hány olyan Neptun-kód létezik, ami legföljebb két számjegyet tartalmaz?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet* ismeri.)

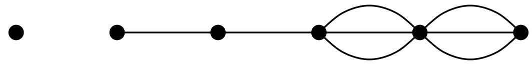
* * * * *

Három eset lehetséges: egy keresett Neptun-kód tartalmazhat 0, 1 vagy 2 számjegyet.
Ha 0 számjegyet tartalmaz, vagyis minden tagja betű, akkor a lehetőségek száma (például az ismétléses variációnál tanultak szerint) 26^6. (1 pont)
Ha 1 számjegyet tartalmaz, akkor ennek a helyét 6-féleképpen választhatjuk meg, majd magát a számjegyet 10-féleképpen. (1 pont)
Végül a fennmaradó 5 helyet 26^5-féleképpen tölthetjük fel betűkkel (hasonlóan a fenti esethez).(1 pont)
Így az 1 számjegyet tartalmazó kódok száma $6 \cdot 10 \cdot 26^5$ (hiszen az elsőként mondott 6 eset mindegyikét 10-féleképp folytathattuk és az így kapott $6 \cdot 10$ eset mindegyikében 26^5 további lehetőség volt).(1 pont)
Ha a kód 2 számjegyet tartalmaz, akkor ezeknek a helye $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$-féleképp választható ki.(1 pont)
A számjegyek helyének ismeretében, hasonlóan az 1 számjegyet tartalmazó kódoknál írtakhoz, $10^2 \cdot 26^4$-féleképpen tölthetjük ki a kódot. (1 pont)
Tehát a 2 számjegyet tartalmazó kódok száma $15 \cdot 10^2 \cdot 26^4$. (1 pont)
Így a legföljebb 2 számjegyet tartalmazó Neptun-kódok száma $26^6 + 6 \cdot 10 \cdot 26^5 + 15 \cdot 10^2 \cdot 26^4$.(3 pont)
Nem jár pontlevonás azért ha a megoldó a hatványok értékét nem fejti ki szorzás formájában.

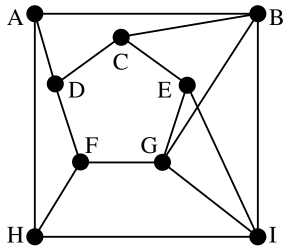
2. A 6 csúcsú G gráf hurokélt nem, de többszörös éleket tartalmazhat. Tudjuk, hogy G bármely két csúcsának a foka különböző. Minimálisan hány éle van G-nek? (Azaz: milyen k egészre teljesül, hogy létezik a feltételeknek megfelelő k élű gráf, de k-nál kevesebb élű már nem?)

* * * * *

Mivel minden fokszám különböző, ezért G-ben a fokok összege legalább $0+1+2+3+4+5=15$ kell legyen. (1 pont)
Azonban a fokok összege az élszám kétszerese, így ez páros. Ezért a fokszámösszeg legalább 16,(2 pont)
amiből következően G éleinek száma legalább 8 (a fokszámösszeg fele). (2 pont)
8 élű, ilyen tuljadonságú gráf viszont már létezik, egy példát mutat az alábbi ábra:



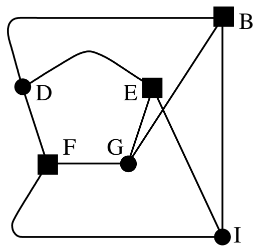
(4 pont)
Ezért a keresett minimális élszám a 8. (1 pont)
Ha a megoldó nem talál egy, a feltételeknek megfelelő gráfot, de azt megállapítja, hogy abban a fokszámok (a korábbiakból következően) csak 0, 1, 2, 3, 4 és 6 lehetnek, akkor ezért a gráf konstruálásáért járó 4 pontból 1-et megkaphat.



3. Síkbarajzolható-e a jobbra látható gráf? Ha igen, rajzoljuk le a síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.

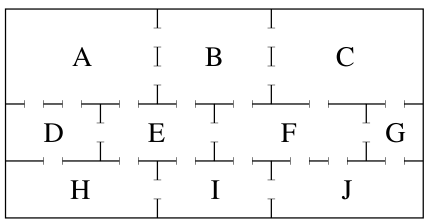
* * * * *

Hagyjuk el a gráfból az $\{A,H\}$, $\{B,C\}$ és a $\{G,I\}$ éleket. (2 pont)
A keletkező gráfban A, C és H foka 2 lesz, az ezekbe menő éleket „olvasszuk össze” egyetlen éllé; az eredményt az alábbi ábra mutatja. (2 pont)



A kapott gráf a $K_{3,3}$, mert a B, E és F csúcsok mindegyike szomszédos a D, G és I csúcsok mindegyikével (és a kapott gráfnak további éle nincs). (2 pont)
Mivel a feladatbeli gráf tartalmaz $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot, ezért a Kuratowski-tétel (annak a „könnyű iránya”) szerint nem síkbarajzolható. (4 pont)
Megjegyezzük, hogy a feladat gráfjában számos más módon is találhatunk $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot, a fenti csak egy a lehetőségek közül. Egy másik például a következő: hagyjuk el az $\{A,B\}$, $\{D,F\}$ és $\{G,I\}$ éleket, majd a 2 fokúvá vált A, D és F csúcsokba menő éleket olvasszuk össze.

A fenti pontozás úgy értendő, hogy 6 pont járhat a $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráf kimutatásáért (akkor is, ha az csak egy – pontos és minden részletre kiterjedő – rajz formájában történik) és 4 pont járhat azért, ha a megoldó ebből a helyes következtetést levonja. Ebből a 4 pontból azonban legföljebb 3 megadható akkor is, ha a megoldónak nem sikerült ugyan $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot találni, de a megoldásból egyértelmű, hogy pontosan tudta, mit keres. Erre utalhat például, ha egy egyébként sikertelen próbálkozás hibáját felismeri, vagy ha helyesen megindokolja, hogy K_5-tel topologikusan izomorf részgráfja miért nem lehet a feladatbeli gráfnak. Természetesen mindez csak arra az esetre vonatkozik, ha a Kuratowski-tétel helyes alkalmazására irányuló szándék a dolgozatból nyilvánvaló, többféleképpen értelmezhető vagy nem világos céllal készült ábrákért nem adunk pontot.



4. Az ábrán egy királyi palota alaprajza látható. A király minden reggel az A jelű lakosztályából sétára indul a palotában. A fejébe veszi, hogy séta közben minden ajtón pontosan egyszer szeretne átmenni. Ha ez sikerülne neki, a séta végpontját jelölné ki trónteremnek. De mivel sosem sikerül, az udvari bölcs azt tanácsolja, hogy falaztassa be az egyik ajtót. Van-e a palotában olyan ajtó, aminek a befalazása után már létezik a király vágyainak megfelelő séta? Ha igen, melyik szobából lehet a trónterem? (Az ábra a befalazás előtti állapotot mutatja.)

* * * * *

A P gráf csúcsai legyenek a palota szobái és P élei feleljenek meg az ajtóknak. A kérdés az, hogy P-nek van-e olyan éle, amit elhagyva a kapott gráfban lesz (az A csúcsból induló) Euler-út; ha pedig igen, akkor melyik csúcs lehet ennek az Euler-útnak a másik végpontja (vagyis a trónterem)? (3 pont)
A tanult tételből következik, hogy P-ből a keresett él elhagyása után (nulla vagy) kettő kivétellel minden csúcs foka páros kell legyen. (1 pont)
Egy él elhagyása a két végpont fokának a paritását változtatja meg. Mivel jelenleg az A, F, G és H csúcsok foka páratlan és ezek közül csak az F és a G szomszédosak, ezért az elhagyandó él (vagyis a befalazandó ajtó) csak az F és G közötti lehet. (2 pont)
Az $\{F, G\}$ él (ajtó) elhagyása után kapott gráf nyilván összefüggő (1 pont)
és benne csak az A és a H foka páratlan, ezért van benne Euler-út. (1 pont)
Ennek a végpontjai csak a páratlan fokú pontok lehetnek (az Euler-út létezésére tanult feltétel szükségességének indoklása kapcsán tanultak miatt – illetve mert az Euler-út végpontjaitól eltekintve minden csúcs fokának párosnak kell lennie, hiszen az Euler-út bejárása során minden „bejárathoz" tartozik egy „kijárat"). Így a trónterem csak H lehet. (2 pont)
A feladat megoldható a kérdés gráfelméleti átfogalmazása nélkül is, ha az Euler-útról tanultak alkalmazása helyett a konkrét esetben újraalkotjuk a vonatkozó gondolatmenetet. Valóban: a bölcs által javasolt ajtó befalazása után a király lakosztálya és trónterem kivételével minden szobának páros sok ajtaja kell legyen, hiszen ahányszor a király a séta során belép egy szobába, annyiszor ki is kell lépnie. Így érvelve azonban szükségessé válik az A-ból H-ba vezető és (az F és G közöttit kivéve) minden ajtót érintő séta konkrét megadása – hiszen gráfelméleti háttér nélkül nem hivatkozhatunk az ide tartozó tételre. Ha egy megoldó ezt elmulasztja, de ettől eltekintve az imént írthoz hasonló, meggyőző érvelést ír arra, hogy az F és G közötti ajtó, valamit H mint trónterem az egyetlen szóba jövő lehetőség, az ezért legföljebb 7 pontot kaphat. Ha viszont egy megoldó csak konkrét példát ad meg az A-ból H-ba vezető, $\{F, G\}$ elhagyása utáni sétára, de nem zárja ki más lehetőség létezését, az ezért legföljebb 3 pontot kaphat.

5. A G egyszerű, síkbarajzolható gráfban minden pont foka legalább 4 és a pontosan 4 fokú csúcsok száma 5. Mutassuk meg, hogy G-ben nincs Euler-kör.

* * * * *

Indirekt tegyük fel, hogy G-ben van Euler-kör. Ekkor a tanult tétel szerint G-ben minden pont foka páros. (1 pont)
Így az 5 darab 4 fokú csúcson kívül minden más csúcs foka legalább 6 kell legyen. (2 pont)
Ezért G-ben a pontok fokának összege legalább $5 \cdot 4 + (n - 5) \cdot 6 = 6n - 10$ (ahol n a G csúcsainak számát jelöli). (3 pont)
Mivel a fokszámösszeg egyenlő az élszám kétszeresével, ezért G éleinek száma legalább $3n - 5$.(2 pont)
Ez ellentmond annak a tanult tételnek, hogy egyszerű, síkbarajzolható gráfnak legföljebb $3n - 6$ éle lehet. Ez az ellentmondás tehát bizonyítja a feladat állítását. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy mivel a megoldásban használt, az egyszerű és síkbarajzolható gráfok élszámára vonatkozó tétel csak a legalább 3 csúcsú gráfokra igaz, ezért egy valóban hiánytalan gondolatmenethez $n \geq 3$ indoklása is hozzátartozna. Ez nyilván igaz, hiszen a 4 fokú pontok létezéséből még $n \geq 5$ is azonnal következik. Ennek ellenére, az $n \geq 3$ indoklásának hiányáért nem vonunk le pontot.

6. A 201 csúcsú G egyszerű gráfban a v csúcs kivételével minden pont foka legalább 101. A v csúcsról csak annyit tudunk, hogy nem izolált pont (vagyis a foka legalább 1). Mutassuk meg, hogy G-ben van Hamilton-út.

* * * * *

Hagyjuk el G-ből a v csúcsot (nyilván az éleivel együtt), a kapott gráfot jelölje G'. (2 pont)
G'-nek 200 csúcsa van és minden pontjának foka legalább 100 (hiszen v elhagyásával a megmaradt pontok foka legföljebb 1-gyel csökkent). (2 pont)
Ezért Dirac tétele miatt G'-ben van egy C Hamilton-kör. (2 pont)
Ebből pedig könnyen következik a feladat állítása: ha v-ből egy tetszőleges w szomszédjára lépünk, majd w-ből indulva bejárjuk a C kört (kivéve annak utolsó, w-be visszavezető élét), akkor épp G egy Hamilton-útját kapjuk. (4 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2016. április 28.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. A 12 csúcsú G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{\text{január}, \text{február}, \ldots, \text{december}\}$ (vagyis G csúcsai a hónapok nevei). Két csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a két megfelelő hónap nevének utolsó betűje különböző vagy a két hónap napban mért hossza különböző (vagy esetleg mindkettő). (Így például G-ben a január szomszédos a februárral, a márciussal és az áprilissal is, de a decemberrel már nem.) Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát. (A februárt tekintsük 28 naposnak.)

* * * * *

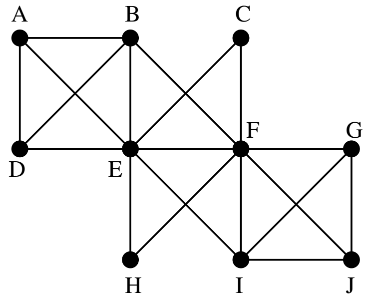
G-ben a február minden más csúccsal szomszédos (hiszen a hossza minden más hónaptól különböző). Mivel a többi hónap mindegyikének hossza 30 vagy 31 nap, az utolsó betűje pedig R vagy S, ezért a maradék 11 hónap 4 csoportra osztható: R végű 30 naposak, R végű 31 naposak, S végű 30 naposak és S végű 31 naposak. Mind a 4 csoport nemüres, lehetséges példák sorra a szeptember, az október, az április és a május. (2 pont)
Mivel az egy csoportba tartozó csúcsok nem szomszédosak G-ben, ezért G-nek egy helyes 5 színnel való színezését kapjuk, ha ennek a 4 csoportnak 4 külön színt biztosítunk, a februárt pedig egy ötödik színnel színezzük meg. (3 pont)
G tartalmaz 5 pontú klikket is: ilyet kapunk, ha a február mellé mind a 4 említett csoportból egy-egy csúcsot választunk. Így például $\{\text{február}, \text{április}, \text{május}, \text{szeptember}, \text{október}\}$ klikk G-ben. (3 pont)
Az 5 pontú klikk bizonyítja, hogy G 4 színnel nem megszínezhető, így $\chi(G) = 5$. (2 pont)

2. A 8 csúcsú teljes gráfnak hagyjuk el 4, egy csúcsra illeszkedő élét. Intervallumgráf-e a kapott gráf?

* * * * *

Legyen v_1 az a közös csúcs, amelyre a négy elhagyott él illeszkedett, az elhagyott élek másik végpontjai legyenek sorra v_2 v_3, v_4 és v_5, a gráf további három csúcsa pedig v_6, v_7 és v_8.
Feleltessük meg a v_1 csúcsnak a számegyenesen az $[1; 2]$ intervallumot, a v_2 v_3, v_4 és v_5 csúcsoknak a $[3; 4]$ intervallumot (vagyis annak négy példányát), a v_6, v_7 és v_8 csúcsoknak pedig az $[1; 4]$ intervallumot (annak egy-egy példányát). (4 pont)
Mivel a felsorolt intervallumok közül az $[1; 2]$ és a $[3; 4]$ nem metsző, de az $[1; 4]$ a többit metszi (valamint a $[3; 4]$ és az $[1; 4]$ különböző példányai közül bármely kettő nyilván metsző), ezért a megadott 8 intervallum által reprezentált intervallumgráf épp a feladatban definiált gráf. (4 pont)
Így a válasz igen, a szóban forgó gráf intervallumgráf. (2 pont)

3. Használjuk Tutte tételét annak igazolására, hogy az alábbi gráfban nincs teljes párosítás. (Tutte tétele arra vonatkozó szükséges és elégséges feltételt ad, hogy egy tetszőleges gráf tartalmaz-e teljes párosítást.)



$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Hagyjuk el a gráfból az E és az F csúcsokat (az éleikkel együtt). Ekkor a maradék gráf a C és H izolált csúcsokból, valamint az A, B és D, illetve a G, I és J csúcsok alkotta három csúcsú teljes gráfokból áll. (4 pont)
Ez azt jelenti, hogy a 2 csúcs elhagyása után kapott gráfnak 4 páratlan komponense van, (3 pont)
így Tutte tételének a feltétele sérül, vagyis az eredeti gráfban nincs teljes párosítás. (3 pont)
Mivel ez a feladat kimondottan a Tutte-tétel alkalmazását kéri a megoldótól, ezért (rész)pontszámot is csak az ebbe az irányba mutató lépésekért lehet adni. A Tutte-tétel alkalmazása nélkül, közvetlenül is könnyű belátni, hogy a feladatbeli gráfban nincs teljes párosítás – azonban egy ilyen gondolatmenet önmagában nem ér pontot. Ha például egy megoldó olyasmit ír, hogy a C és H csúcsok párjai csak E és F lehetnek, de ezután már az ABD és GIJ háromszögekből is legföljebb csak egy-egy él vehető be a párosításba, akkor ez interpretálható úgy is, hogy a megoldó (tudtán kívül) a feladatbeli gráfra vonatkozóan „újra felfedezte" a Tutte-tétel feltételét; mégis, ha a megoldásból nem derül ki egyértelműen, hogy ennek a ténynek a megoldó is tudatában van, akkor ez a gondolatmenet nem ér pontot. Más a helyzet természetesen, ha a megoldó felismeri a Tutte-feltétel sérülését, majd (a feladat megoldásának szempontjából egyébként szükségtelenül) az adott gráfra vonatkozóan elmagyarázza, hogy ez miért zárja ki a teljes párosítás létezését; egy ilyen megoldás nyilván maximális pontszámot érhet. Ha egy megoldó nem tesz említést a keletkező komponensek páratlanságáról és csak annyit mutat meg, hogy két pont elhagyása után 4 komponens keletkezik, az ezért a fenti pontozás szerinti első 4 pontot kaphatja meg.

4. A G egyszerű gráf v csúcsának foka 2, minden más pont foka 3. Határozzuk meg a G gráf $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

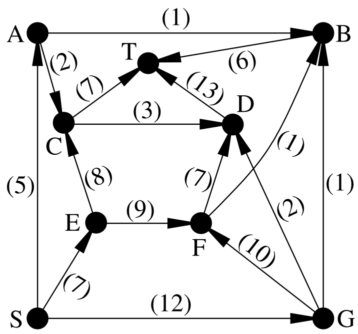
Mivel G egyszerű és benne a maximális fokszám 3, ezért Vizing tétele miatt $\chi_e(G) \leq 4$. (2 pont)
Tegyük fel indirekt, hogy G élei megszínezhetők 3 színnel és a (2 fokú) v csúcsra illeszkedő egyik él színe legyen a piros. Mivel minden 3 fokú u csúcs esetében az u-ra illeszkedő 3 élen mindhárom szín meg kell jelenjen, ezért minden csúcsra pontosan egy piros él kell illeszkedjen. (2 pont)
Így a piros élek teljes párosítást alkotnak G-ben. (2 pont)
Másrészt viszont ismert, hogy a G-beli fokszámok összege páros (az élszám kétszerese), így a páratlan fokú csúcsok száma páros. Ezért a 3 fokú csúcsok száma páros, így G összes csúcsainak száma (v-vel együtt) páratlan. (2 pont)
Mivel páratlan csúcsszámú gráfban nyilván nem létezhet teljes párosítás, ellentmondásra jutottunk. Így G élei nem színezhetők meg 3 színnel, vagyis $\chi_e(G) = 4$. (2 pont)
A 3 színnel való élszínezés lehetetlensége megmutatható a következőképpen is. Legyen a G csúcsainak száma $2k+1$ – hiszen a fenti megoldásból kiderült, hogy az páratlan. Ekkor a G-beli fokok összege $(2k) \cdot 3 + 2 = 6k + 2$, így a G élszáma $3k + 1$. G egy tetszőleges élszínezésében minden szín legföljebb k-szor használható, hiszen az azonos színű élek párosítást alkotnak G-ben és egy $k+1$ élű párosításhoz már $2k+2$ csúcs kellene. Ezért 3 színnel legföljebb $3k$ él volna megszínezhető, ami tehát kevesebb az összes élek számánál.

5. A $G(A,B;E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{101}\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{101}\}$. Minden $1 \le i \le 101$ és $1 \le j \le 101$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha $i \cdot j$ páros. Határozzuk meg $\nu(G)$, a független élek maximális számának, valamit $\varrho(G)$, a lefogó élek minimális számának értékét és adjunk meg G-ben egy maximális független élhalmazt és egy minimális lefogó élhalmazt.

* * * * *

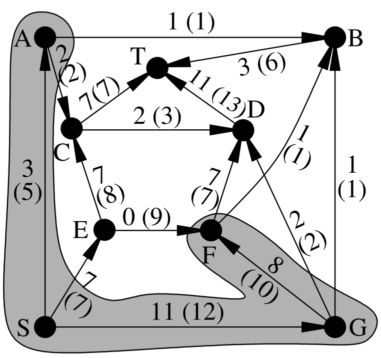
G-ben könnyen megadható egy 100 élű független élhalmaz (avagy párosítás): például $M = \big\{\{a_1, b_2\}, \{a_2, b_3\}, \ldots, \{a_{100}, b_{101}\}\big\}$. (1 pont)
Az $X = \{a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{100}, b_2, b_4, b_6, \ldots, b_{100}\}$ halmaz lefogó ponthalmaz G-ben, hiszen $i \cdot j$ (akkor és) csak akkor páros, ha i és j közül legalább az egyik páros. (3 pont)
Mivel $|X| = 100$, ezért a tanultak szerint G-ben nem lehet 100-nál nagyobb méretű független élhalmaz. Így $\nu(G) = 100$ (és a fenti M párosítás maximális). (2 pont)
Gallai tétele szerint $\nu(G)$ és $\varrho(G)$ összege a csúcsok száma, így $\varrho(G) = 102$. (1 pont)
A tanultak szerint 102 elemű lefogó élhalmazt kapunk, ha egy 100 élű (vagyis maximális) párosításhoz hozzávesszünk két további élt úgy, hogy ezzel a párosítás által le nem fogott két csúcs is lefogottá váljon. Így például a fenti M párosítás az a_{101} és b_1 csúcsokat hagyta fedetlenül, ezért $M \cup \big\{\{a_{101}, b_2\}, \{a_2, b_1\}\big\}$ minimális lefogó élhalmaz. (3 pont)
Egy 100 pontú lefogó ponthalmaz megadásán kívül más lehetőség is van arra, hogy megmutassuk, hogy egy 100 élű párosítás maximális. Lehet például hivatkozni arra, hogy mivel az $X = \{a_1, a_3, \ldots, a_{101}\}$ halmazra $N(X) = \{b_2, b_4, \ldots, b_{100}\}$, ezért a Hall-feltétel sérül, így G-ben nem lehet A-t lefedő, vagyis 101 élű párosítás. De azt sem nehéz megmutatni, hogy egy megadott 100 élű párosításra nézve G-ben már nincs javító út, így a tanult tétel szerint az maximális.

6. Adjunk meg a jobbra látható hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be).



* * * * *

Az alábbi ábrán látható folyam értéke 21. (3 pont)
Az ugyancsak az ábrán látható vágás (tehát az $\{S, A, F, G\}$ halmaz és a maradék csúcsok között futó élek halmaza) értéke (tehát az $\{S, A, F, G\}$ halmazból a maradék csúcsok halmazába menő élek összkapacitása) szintén 21. (4 pont)
Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás értéke, ezért a 21 értékű vágás bizonyítja, hogy a 21 értékű folyam maximális. (3 pont)
Az utolsó 3 pont tehát annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális. (Például az „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális" mondat – további kiegészítés híján – *nem* tekintendő (érdemi) indoklásnak.) A folyam maximalitása mellett lehet annak megmutatásával is érvelni, hogy a 21 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út.



Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2016. május 9.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

1. Egy fagylaltozóban 26 féle fagylaltot árulnak. Egy vendég négy kehelynyi fagylaltot rendel, mindet sajátmagának. Azt kéri a felszolgálótól, hogy mind a négy kehelyben három gombóc fagylalt legyen és egy-egy kelyhen belül mindig csupa különböző fajta. Az nem zavarja, ha ugyanazt a fajta fagylaltot különböző kelyhekben akár többször is megkapja, de azt határozottan kéri, hogy azért semelyik két kehely tartalma ne legyen teljesen azonos. Hányféleképpen szolgálhatják ki a vendéget? (A kelyheken belül a gombócok sorrendje nyilván közömbös – és mivel mind a négy kelyhet ugyanaz a vendég kapja, ezért a kelyhek sorrendje sem számít. Azt viszont különböző esetnek tekintjük, ha ugyanazok a fajta fagylaltok máshogyan vannak szétosztva a négy kehelyben.)
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet* ismeri.)

* * * * *

Mivel a kelyheken belül a gombócok sorrendje közömbös, ezért egyetlen háromgombócos kehely elkészítésére a lehetőségek száma $\binom{26}{3} =$ (1 pont)
$= \frac{26\cdot 25\cdot 24}{1\cdot 2\cdot 3} = 2600.$ (2 pont)
A vendég kérése nem más, mint hogy a háromgombócos kelyhekre vonatkozó 2600 lehetőség közül a felszolgáló válasszon ki 4 különbözőt (a felszolgálandókat), amelyeknek a sorrendje ismét közömbös. (3 pont)
Ezért a vendég kérésének a teljesítésére vonatkozó lehetőségek száma $\binom{2600}{4} =$ (3 pont)
$= \frac{2600\cdot 2599\cdot 2598\cdot 2597}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$ (1 pont)
Természetesen nem jelent pontlevonást, ha egy megoldó $\binom{26}{3}$ értékét nem számítja ki, hanem (például) valamilyen jelölést vezet be rá és ezt használva fejezi ki $\binom{\binom{26}{3}}{4}$ értékét.

2. Minimálisan hány éle kell legyen egy olyan 10 csúcsú egyszerű gráfnak, amelynek van 3 darab 9 fokú csúcsa? (Azaz: milyen k egészre teljesül, hogy létezik a feltételeknek megfelelő k élű gráf, de k-nál kevesebb élű már nem?)

* * * * *

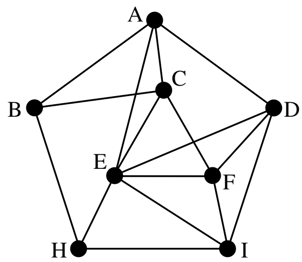
Ha G ilyen gráf, akkor a 9 fokú csúcsai minden más csúccsal szomszédosak (hiszen G egyszerű). (1 pont)
Mivel G-nek van 3 darab 9 fokú csúcsa, ezért G-ben minden pont foka legalább 3. (1 pont)
Így a G-ben a pontok fokszámösszege legalább $7 \cdot 3 + 3 \cdot 9 = 48$, (2 pont)
így az éleinek száma (vagyis a fokszámösszeg fele) legalább 24. (2 pont)
Ez egyben útmutatást is ad arra, hogy egy 24 élű, a feltételeknek megfelelő gráfot hogyan készítsünk el: ha $V(G) = \{v_1, \ldots, v_{10}\}$ és a v_1, v_2, v_3 csúcsokat összekötjük mindegyik másikkal (beleértve egymást is), de ezeken kívül nem húzunk be a gráfba további élt, akkor épp egy 24 élű, a feltételeknek megfelelő G gráfot kapunk (hiszen v_1, v_2, v_3 foka 9 lesz és a G-beli fokszámösszeg $7 \cdot 3 + 3 \cdot 9 = 48$). (3 pont)
Így tehát az ilyen tulajdonságú gráfok minimális élszáma 24. (1 pont)

3. Van-e $K_{10,10}$-nek, a „10 ház, 10 kút” gráfnak olyan feszítőfája, amelyben minden csúcs foka páratlan? (A $K_{10,10}$ gráfnak tehát 20 csúcsa van és ha ezek közül 10-et háznak, a maradék 10-et kútnak nevezzük, akkor a gráfban minden ház minden kúttal össze van kötve egy éllel, de a gráfnak további éle nincs.)

* * * * *

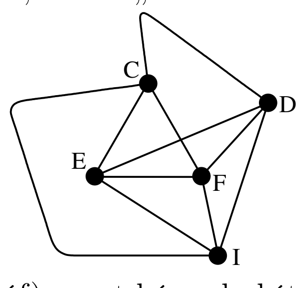
Legyen $K_{10,10}$ csúcshalmaza $\{h_1, \ldots, h_{10}, k_1, \ldots, k_{10}\}$, ahol a h_i-k a házaknak, a k_i-k a kutaknak felelnek meg. Legyen F a $K_{10,10}$ egy tetszőleges feszítőfája (amelynek a csúcshalmaza tehát azonos $K_{10,10}$-ével).
Mivel F egy 20 csúcsú fa, ezért 19 éle van. (2 pont)
F minden éle egy házat köt össze egy kúttal (hiszen F élei $K_{10,10}$-nek is élei). (1 pont)
Ezért F éleinek számát kapjuk, ha (például) a házak (F-ben vett) fokszámait összeadjuk (hiszen ezzel F minden élét pontosan egyszer számoljuk meg, mégpedig annak a „ház” végénél). (3 pont)
Mivel 10 darab páratlan egész összege páros volna, vagyis nem lehetne 19-cel egyenlő, ezért a házak fokai között kell legyen páros szám is. Így tehát $K_{10,10}$-nek nincs ilyen feszítőfája. (4 pont)

4. Síkbarajzolható-e a jobbra látható gráf? Ha igen, rajzoljuk le a síkba úgy, hogy az élei egyenes szakaszok legyenek; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.



* * * * *

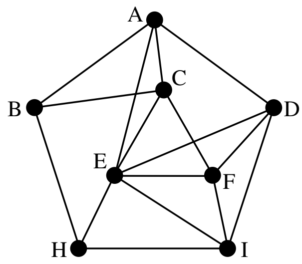
Hagyjuk el a gráfból az $\{A, B\}$, $\{A, E\}$ és $\{E, H\}$, éleket. (2 pont)
A keletkező gráfban A, B és H foka 2 lesz, ezeket „olvasszuk össze” egyetlen éllé: (2 pont)



A kapott gráf a K_5 (az 5 csúcsú teljes gráf), mert bármely két csúcsa szomszédos. (2 pont)
Mivel a feladatbeli gráf tartalmaz K_5-tel topologikusan izomorf részgráfot, ezért a Kuratowski-tétel (annak a „könnyű iránya”) szerint nem síkbarajzolható. (4 pont)
Megjegyezzük, hogy a gráf $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot is tartalmaz (például a $\{A, B\}$, $\{C, E\}$, $\{D, E\}$, $\{E, H\}$ és $\{F, I\}$ élek elhagyásával, majd a kapott másodfokú pontok összeolvasztásával kaphatunk ilyet), így a feladatnak más jó megoldása is van.

5. a) Van-e Euler-kör a jobbra látható gráfban? Ha igen, adjunk meg egyet; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.

b) Van-e Euler-út a jobbra látható gráfban? Ha igen, adjunk meg egyet; ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be.



$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

a) Mivel a B és H pontok foka páratlan, ezért (a tanultak szerint) a gráfban nincs Euler-kör.(2 pont)

b) A gráfban van Euler-út: például ha az éleket $B \to A \to D \to I \to H \to B \to C \to A \to E \to C \to F \to E \to D \to F \to I \to E \to H$ sorrendben járjuk be. (8 pont)

Ha egy megoldó nem ad meg Euler-utat, de hivatkozva arra, hogy a B és H csúcsokon kívül minden pont foka páros és a gráf összefüggő megmutatja, hogy a tanult tétel szerint van benne Euler-út, az a b) részért járó 8 pontból 3-at megkaphat (amelyből 1 pont veszteséget jelentsen az összefüggőség említésének elmulasztása). További 1 pontot kaphat az a megoldó, aki az Euler-út létezésén kívül azt is megmutatja, hogy annak a végpontjai csak B és H lehetnek.

6. A (8×8-as) sakktábláról válasszunk ki találomra k darab mezőt, ahol $k \geq 10$ tetszőleges. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is választottuk a mezőket, azok megszámozhatók 1-től k-ig úgy, hogy ha két kiválasztott mező (él mentén) szomszédos, akkor a sorszámaik különbsége mindig legalább 2.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A G gráf csúcsai legyenek a kiválasztott mezők és két csúcs akkor legyen összekötve G-ben, ha a megfelelő mezők *nem* élszomszédosak a sakktáblán. (2 pont)

A feladat annak megmutatása, hogy G-ben van Hamilton-út. Valóban: ha egy Hamilton-út mentén haladva sorban megszámozzuk a mezőket 1-től k-ig, akkor az egymás után következő sorszámoknak megfelelő csúcsok G-ben össze vannak kötve, vagyis a sakktábla megfelelő mezői nem élszomszédosak; így az élszomszédos mezőpárok sorszámai közti különbség valóban mindig legalább 2. (4 pont)

Mivel a sakktábla egy mezője legföljebb 4 másikkal élszomszédos, ezért G minden csúcsa sajátmagán kívül legföljebb másik 4-gyel nincs összekötve. Ezért G-ben minden pont foka legalább $k - 5$. (2 pont)

Mivel $k \geq 10$ miatt $k-5 \geq \frac{k}{2}$, ezért a Dirac-tétel szerint G-ben van Hamilton-kör. Így persze Hamilton-út is van, ami tehát az állítást bizonyítja. (2 pont)

Érdemes megemlíteni, hogy a feladatnak van a Dirac-tételt nem használó (de cserébe több kreativitást igénylő) megoldása is. Egy lehetőség például a következő: a kiválasztott mezők közül először soroljuk fel a (sakktábla színezése szerint) sötéteket, majd a világosakat. Mivel azonos színű mezők sosem élszomszédosak, csak arra kell vigyáznunk, hogy az utolsó sötét mező se legyen élszomszédos az első világossal. Mivel egy különböző színű, de nem élszomszédos mezőpár létezése már 6 kiválasztott mező esetén is garantált, ezért a feladat állítása már $k \geq 6$ esetén is igaz.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

1. A G gráf csúcsai legyenek az 5 hosszúságú bitsorozatok (vagyis csupa 0 és 1 tagokból álló sorozatok). Két bitsorozat akkor legyen szomszédos G-ben, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól. Páros gráf-e a G gráf?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az A csúcshalmazt alkossák a páros sok 1-est tartalmazó bitsorozatok, a B halmazt alkossák a páratlan sok 1-est tartalmazók. (3 pont)

Mivel egy bit megváltoztatása az 1-esek számának paritását is megváltoztatja, ezért G minden éle A-beli bitsorozatot köt össze B-belivel. (4 pont)

Ezért G páros gráf. (3 pont)

A feladat jóval bonyolultabban, de megoldható arra való hivatkozással is, hogy G nem tartalmaz páratlan kört és ezért páros gráf. Egy ilyen megoldás (beleértve a vonatkozó tételre való hivatkozást is) csak akkor érhet pontot, ha a megoldó meggyőzően érvel a páratlan kör nem létezése mellett. (Egy lehetőség például a következő: ha egy bitsorozatból sajátmagáig akarunk jutni a G élei mentén haladva, akkor minden bitet páros sokszor kell megváltoztatnunk, hogy a végén az eredetivel azonos legyen; így minden kör hossza páros számok összege, vagyis páros.)

2. A G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G) = \{1, 2, \ldots, 30\}$ halmaz. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha az x és y számok különbsége legalább 7. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.

* * * * *

G-ben 5 csúcsú klikket alkotnak az $1, 8, 15, 22, 29$ csúcsok (hiszen bármely kettő szomszédos, mert a különbségük legalább 7). (3 pont)
Ez (a tanultak szerint) bizonyítja, hogy G 5-nél kevesebb színnel nem színezhető meg. (2 pont)
5 színnel viszont megszínezhető: kapják az $1, 2, \ldots, 7$ csúcsok az első színt, a $8, 9, \ldots, 14$ csúcsok a másodikat, stb., a $29, 30$ csúcsok az ötödiket. (2 pont)
Ez a színezés jó: az azonos színű csúcsok különbsége mindig legfeljebb 6, így sosem szomszédosak. (2 pont)
Mivel G 5 színnel megszínezhető, de kevesebbel nem, ezért $\chi(G) = 5$. (1 pont)

3. A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Minden $1 \le i \le 8$ és $1 \le j \le 8$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Határozzuk meg $\nu(G)$, a független élek maximális számának, valamint $\varrho(G)$, a lefogó élek minimális számának értékét és adjunk meg G-ben egy maximális független élhalmazt és egy minimális lefogó élhalmazt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

G-ben könnyen megadható egy 6 élű független élhalmaz (más néven párosítás): például $M = \big\{\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_7\}, \{a_3, b_5\}, \{a_4, b_4\}, \{a_5, b_2\}, \{a_8, b_3\}\big\}$. (1 pont)
Az $X = \{a_3, a_5, a_8, b_1, b_4, b_7\}$ halmaz lefogó ponthalmaz G-ben (ez a feladatban megadott mátrixból könnyen ellenőrizhető: a megfelelő sorok és oszlopok együtt minden 1-est tartalmaznak). (3 pont)
Mivel $|X| = 6$, ezért a tanultak szerint G-ben nem lehet 6-nál nagyobb méretű független élhalmaz. Így $\nu(G) = 6$ (és a fenti M párosítás maximális). (2 pont)
Gallai tétele szerint $\nu(G)$ és $\varrho(G)$ összege a csúcsok száma, így $\varrho(G) = 16 - 6 = 10$. (1 pont)
A tanultak szerint 10 elemű lefogó élhalmazt kapunk, ha egy 6 élű (vagyis maximális) párosításhoz hozzávesszünk 4 további élt úgy, hogy ezzel a párosítás által le nem fogott 4 csúcs is lefogottá váljon. Így például a fenti M párosítás az a_6, a_7, b_6, b_8 csúcsokat hagyta fedetlenül, ezért például $M \cup \big\{\{a_6, b_1\}, \{a_7, b_1\}, \{a_3, b_6\}, \{a_3, b_8\}\big\}$ minimális lefogó élhalmaz. (3 pont)
Megjegyezzük, hogy a maximális párosítást és a minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges ennek a lépéseit dokumentálni.

4. A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G) = 3$ és G csúcsainak van olyan 3 színnel való színezése, amelyben az egyik színt csak egyetlen csúcs kapja. Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \le \nu(G) + 1$ (ahol $\nu(G)$ a G-beli független élek maximális számát, $\tau(G)$ a lefogó pontok minimális számát jelöli).

* * * * *

Vegyük G-nek egy olyan (a feladat szerint létező) 3 színnel való színezését, amelyben az egyik színt csak a v csúcs kapja.
Ha G-ből elhagyjuk a v csúcsot (az éleivel együtt), akkor a kapott G' gráf 2 színnel színezhető, (1 pont)
így G' páros gráf. (2 pont)
Ebből a Kőnig-tétel szerint $\nu(G') = \tau(G')$ következik. (2 pont)
A $\nu(G) \ge \nu(G')$ összefüggés nyilvánvaló (hiszen egy G'-beli párosítás egyben G-beli párosítás is). (1 pont)
Ha egy G'-beli X (minimális, vagyis $\tau(G')$ méretű) lefogó ponthalmazhoz hozzávesszük v-t, akkor G-beli lefogó ponthalmazt kapunk. Valóban: X lefogja G' éleit, a v pedig a G többi élét. (2 pont)
Ebből tehát $\tau(G) \le \tau(G') + 1$ következik. (1 pont)
Mindezek összevetéséből: $\tau(G) \le \tau(G') + 1 = \nu(G') + 1 \le \nu(G) + 1$, amivel az állítást beláttuk. (1 pont)

5. A G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G) = \{1, 2, \dots, 30\}$ halmaz. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és az $x \cdot y$ szorzat osztható 7-tel. Határozzuk meg a G gráf $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

* * * * *

G-ben az 7, 14, 21, 28 csúcsok szomszédosak az összes többivel (így egymással is), de a gráfnak további éle nincs (lévén 7 prím). (1 pont)
Így a G-beli maximális fokszám 29. Ezért (a tanultak szerint) $\chi_e(G) \geq 29$. (1 pont)
Megadjuk G egy helyes élszínezését 29 színnel; ebből tehát $\chi_e(G) = 29$ következni fog. (1 pont)
Válasszuk G éleit kétfelé: az E_1 élhalmazt alkossák a $\{7, 14, 21, 28\}$ csúcshalmazon belül futó élek, az E_2 élhalmazt pedig a többi. (1 pont)
A $G_2 = (V(G), E_2)$ gráf páros gráf, hiszen minden éle egy 7-tel osztható számot köt össze egy 7-tel nem oszthatóval. (1 pont)
Így Kőnig tanult tétele miatt $\chi_e(G_2) = \Delta(G_2)$. (2 pont)
$\Delta(G_2) = 26$, mert a 7-tel osztható számok mind a 26 darab 7-tel nem oszthatóval össze vannak kötve, de a 7-tel nem osztható számok foka csak 4. Tehát E_2 élei megszínezhetők 26 színnel. (1 pont)
Az E_1 élei a $\{7, 14, 21, 28\}$ csúcshalmazon 4 csúcsú teljes gráfot alkotnak. Ezért E_1 könnyen megszínezhető 3 színnel: például ha a $\{7, 14\}, \{21, 28\}$ éleket az első színnel, a $\{7, 21\}, \{14, 28\}$ éleket a második színnel, a $\{7, 28\}, \{14, 21\}$ éleket a harmadik színnel színezzük. (1 pont)
E_1 és E_2 fenti színezéseiből pedig valóban könnyen kialakítható G egy helyes élszínezése 29 színnel: ilyet kapunk, ha az E_1-hez használt 26 színt páronként különbözőnek választjuk az E_2-höz használt 3 további színtől. (1 pont)

6. Legyen adott egy G irányított gráf, az $s \in V(G)$ rögzített csúcs és a $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény. Tegyük fel, hogy bármely $t \in V(G)$, $t \neq s$ csúcs esetén az s-ből t-be vezető maximális folyam értéke legalább 100 és a t-ből s-be vezető maximális folyam értéke is legalább 100. Mutassuk meg, hogy ekkor bárhogyan választjuk az $u, v \in V(G)$, $u \neq v$ csúcsokat, az u-ból v-be vezető maximális folyam értéke is legalább 100.

* * * * *

Válasszuk meg tetszőlegesen az $u, v \in V(G)$, $u \neq v$ csúcsokat. Megmutatjuk, hogy minden uv-vágás kapacitása legalább 100. Ebből a Ford-Fulkerson tétel értelmében következni fog, hogy az u-ból v-be vezető maximális folyam értéke is legalább 100. (1 pont)
Vegyünk tehát egy olyan $X \subseteq V(G)$ csúcshalmazt, amelyre $u \in X$ és $v \notin X$ és vizsgáljuk az X és a maradék csúcsok között futó élek alkotta C vágást. (1 pont)
Két eset lehetséges: $s \in X$ vagy $s \notin X$.
Az első esetben a $t = v$ választással a feladat szövege szerint azt kapjuk, hogy az s-ből $v = t$-be vezető maximális folyam értéke legalább 100. (2 pont)
Mivel C egyben st-vágás is (hiszen $s \in X$ és $v = t \notin X$), ezért a Ford-Fulkerson tétel értelmében C kapacitása valóban legalább 100. (2 pont)
Az $s \notin X$ eset ehhez hasonló: ekkor a $t = u$ választással a feladat szövege azt (is) állítja, hogy a t-ből s-be vezető maximális folyam értéke legalább 100. (2 pont)
Mivel C most ts-vágás (hiszen $u = t \in X$ és $s \notin X$), ezért a Ford-Fulkerson tétel megint garantálja, hogy C kapacitása legalább 100. (2 pont)
Ezzel tehát valóban minden uv-vágásról beláttuk, hogy a kapacitása legalább 100, így az állítást beláttuk.