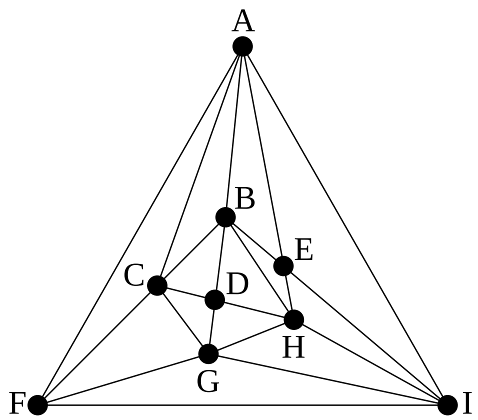
Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2013. március 21.

1. Legyenek a G gráf csúcsai egy 5×5-ös sakktábla mezői és két különböző csúcs akkor legyen összekötve G-ben, ha a megfelelő mezők közös él mentén szomszédosak. A (24 csúcsú) G_1 gráfot úgy nyerjük G-ből, hogy a sakktábla egyik sarkának megfelelő csúcsot (az éleivel együtt) elhagyjuk G-ből. A (23 csúcsú) G_2 gráfot hasonlóan nyerjük G-ből, csak két átellenes sarkot hagyunk el.

a) Van-e G_1-ben Hamilton-kör? b) Van-e G_2-ben Hamilton-kör?

2. Létezik-e olyan két sorú A mátrix, amelynek minden eleme az $1, 2, \ldots, 30$ számok valamelyike, A bármely két szomszédos oszlopában álló négy elem páronként különböző és bárhogyan választjuk az x_1, x_2, y_1, y_2 páronként különböző, 1 és 30 közötti számokat, A-nak pontosan egy olyan, egymás melletti oszlopokból álló 2×2-es részmátrixa van, amelynek az egyik oszlopában x_1 és x_2, a másikban y_1 és y_2 áll (valamilyen sorrendben)?

3. Határozzuk meg az alábbi G gráf kromatikus számát, $\chi(G)$-t és adjuk meg G egy jó színezését $\chi(G)$ színnel!

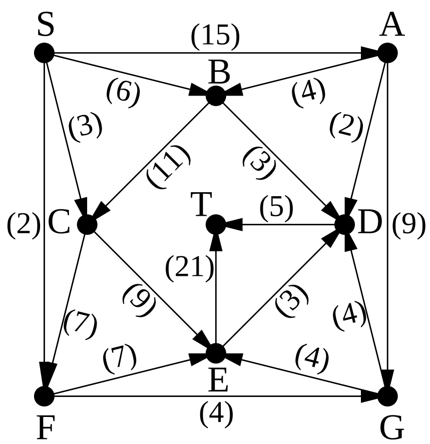


4. A 2013 csúcsú G egyszerű gráfnak van 2009 darab 2011 fokú csúcsa. Mutassuk meg, hogy G perfekt!

5. A $G(A, B; E)$ egyszerű, páros gráfban $|A| = |B| = n$ (valamely $n \geq 1$ egészre) és bármely nemszomszédos $u \in A$ és $v \in B$ csúcsok esetén $d(u) + d(v) \geq n$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-ben van teljes párosítás!

6. a) Határozzuk meg az alábbi hálózatban az $\{S, E, F\}$ csúcshalmaz és a maradék csúcsok között vezető élek alkotta vágás értékét (más néven kapacitását)!

b) Adjunk meg a hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be)!



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc. A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok

2013. április 25.

1. Az alábbi mátrix egy hurokélmentes, irányított gráf illeszkedési mátrixa. Adjuk meg a hiányzó ($\square$-val jelölt) elemeket és rajzoljuk le a gráfot!

$$\begin{pmatrix} 1 & \square & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \square & \square \\ \square & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. A legalább négy pontú G gráf bármely két, nemszomszédos pontja között található G-ben három, páronként éldiszjunkt út. Mutassuk meg, hogy G-nek bármely két szomszédos pontja között is található három, páronként éldiszjunkt út!

3. Egy egész szám 222-vel vett osztási maradéka 4-gyel kisebb, mint a szám 60-szorosának a 222-vel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 222-vel osztva?

4. Egy n egész szám 3 maradékot ad 82-vel osztva. Milyen maradékot adhat az n szám 182-vel osztva?

5. Hány olyan n egész szám van 1 és 100 között, amelyre $(n+51!)^{52}-1$ osztható 53-mal?

6. Legyen $H = \{a, b, c, d, p, q, r, s\}$ és értelmezzük a H halmazon a $*$ műveletet az alábbi műveleti tábla szerint:

$*$	a	b	c	d	p	q	r	s
a	b	q	d	r	a	p	s	c
b	q	p	r	s	b	a	c	d
c	s	r	b	a	c	d	p	q
d	c	s	q	b	d	r	a	p
p	a	b	c	d	p	q	r	s
q	p	a	s	c	q	b	d	r
r	d	c	p	q	r	s	b	a
s	r	d	a	p	s	c	q	b

(A műveleti tábla használata magától értetődő: az $x*y$ művelet eredménye az x-nek megfelelő sor és az y-nak megfelelő oszlop kereszteződésében található. Így például $q * c = s$ és $b * q = a$.) Döntsük el, hogy a H halmaz csoportot, illetve Abel-csoportot alkot-e a $*$ műveletre nézve, ha azt már tudjuk, hogy $*$ asszociatív! (Az asszociativitást tehát nem kell ellenőrizni.)

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

2013. május 16.

1. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $x \cdot y$ osztható 3-mal vagy 5-tel (vagy mindkettővel).

a) Van-e G-ben Hamilton-út?

b) Van-e G-ben Hamilton-kör?

2. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{100, 101, \ldots, 200\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $(x, y) \geq 10$ (ahol (x, y) az x és y legnagyobb közös osztóját jelöli). Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t.

3. Határozzuk meg egy 6 csúcsú kör komplementerének élkromatikus számát!

4. A G perfekt gráf tartalmaz 2013 csúcsú kört. Igaz-e feltétlenül, hogy G tartalmaz 3 csúcsú kört?

5. A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Legyen adott egy G irányított gráf, az $s \in V(G)$ csúcs és a $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény. Jelölje minden $v \in V(G)$, $v \neq s$ esetén $m(v)$ az s-ből a v-be vezető maximális folyam értékét. Tegyük fel, hogy valamely $t \in V(G)$ csúcsra $m(t) = 100$, de minden $v \in V(G)$, $v \neq s, t$ esetén $m(v) > 100$. Mutassuk meg, hogy ekkor a t-be érkező élek összkapacitása 100.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2013. május 16.

1. Az alábbi mátrix egy egyszerű, összefüggő gráf szomszédossági mátrixa. Adjuk meg a hiányzó (□-val jelölt) elemeket és rajzoljuk le a gráfot!

$$\begin{pmatrix} \square & 0 & \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & 1 & 0 & \square & 0 \\ 0 & \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

2. Legyen G egy hurokélmentes, irányítatlan gráf és $s \in V(G)$ egy rögzített csúcs. Jelölje minden $v \in V(G)$, $v \neq s$ esetén $\lambda(v)$ az s-ből a v-be vezető, páronként éldiszjunkt utak maximális számát. Tegyük fel, hogy valamely $t \in V(G)$ csúcsra $\lambda(t) = 10$, de minden $v \in V(G)$, $v \neq s, t$ esetén $\lambda(v) > 10$. Mutassuk meg, hogy ekkor t foka 10.

3. Egy egész számra teljesül, hogy $37n + 9$ és $n + 10$ azonos maradékot ad 235-tel osztva. Mi lehet ez a közös maradék?

4. Egy n egész szám 3 maradékot ad 72-vel osztva. Milyen maradékot adhat 102-vel osztva a $2n + 7$ szám?

5. Mi az utolsó két számjegye a 11-es számrendszerben a (10-es számrendszerben felírt) $42^{41^{40}}$ számnak?

6. A G (tetszőleges) csoport a, b, c és d (különböző) elemeire fennállnak az $a * b = a$, $c * d = b$ és $a * c = d$ összefüggések (ahol a G műveletét $*$-gal jelöltük). Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül:

(i) az állítás biztosan igaz;

(ii) az állítás biztosan hamis;

(iii) az állítás lehet igaz is és hamis is (G és a, b, c, d választásától függően).

a) $c^{-1} \in \{a, b, c, d\}$

b) $c * a \in \{a, b, c, d\}$

c) $d * a \in \{a, b, c, d\}$

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc. A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

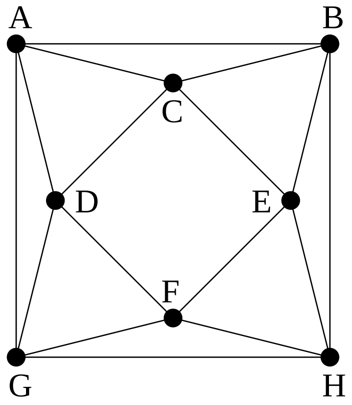
Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

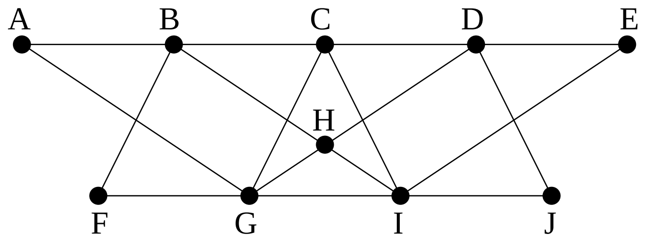
2013. május 24.

1. Legyen G tetszőleges n csúcsú, egyszerű gráf. Mutassuk meg, hogy létezik olyan legföljebb $n+2$ csúcsú G' egyszerű gráf, amelyre teljesül, hogy G'-nek van Euler-köre és G feszített részgráfja G'-nek.

2. Határozzuk meg az alábbi G gráf kromatikus számát, $\chi(G)$-t és adjuk meg G egy jó színezését $\chi(G)$ színnel!



3. Legkevesebb hány élt kell hozzávenni az alábbi gráfhoz ahhoz, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör?



4. A 10 csúcsú G egyszerű gráfban az u és v nemszomszédos pontok foka 4, a többi 8 pont foka 1. Határozzuk meg $\chi_e(\overline{G})$-t, G komplementerének élkromatikus számát.

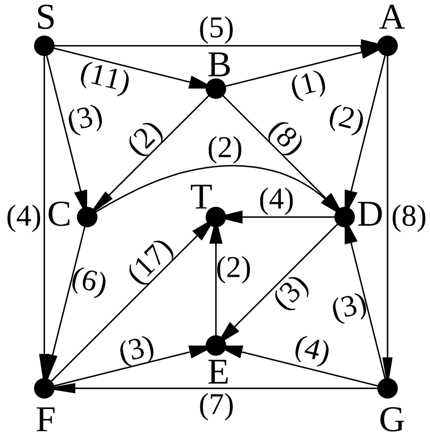
5. Legyen G páros gráf és $e = \{u, v\}$ egy éle G-nek. Igazak-e mindig az alábbi állítások?

a) Ha van olyan maximális elemszámú párosítás G-ben, amely e-t tartalmazza, akkor nincs olyan minimális elemszámú lefogó ponthalmaz G-ben, amely u-t és v-t is tartalmazza.

b) Ha nincs olyan minimális elemszámú lefogó ponthalmaz G-ben, amely u-t és v-t is tartalmazza, akkor van olyan maximális elemszámú párosítás G-ben, amely e-t tartalmazza.

6. a) Határozzuk meg az alábbi hálózatban az $\{S, C, F\}$ csúcshalmaz és a maradék csúcsok között vezető élek alkotta vágás értékét (más néven kapacitását)!

b) Adjunk meg a hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális értékű vágást (S és T között)!



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2013. május 24.

1. A G egyszerű gráfban a v csúcs foka 100, a v-vel szomszédos pontok foka 49, az összes többi csúcs foka 50. Bizonyítsuk be, hogy 50 sajátértéke a G szomszédossági mátrixának.

2. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{100}\}$. Tegyük fel, hogy bármely $1 \leq i \leq 5$ és $6 \leq j \leq 100$ esetén v_i és v_j között létezik 5 darab, páronként (a végpontoktól eltekintve) pontdiszjunkt út. Következik-e ebből, hogy G ötszörösen pontösszefüggő?

3. Milyen maradékot adhat egy egész szám 274-gyel osztva, ha a 97-szerese 11 maradékot ad 274-gyel osztva?

4. Hány olyan n egész szám van 1 és 1000 között, amelyre igaz, hogy n-nek van olyan többszöröse, amelynek az utolsó három számjegye 001?

5. Milyen maradékot adnak 51-gyel osztva az alábbi számok?

a) $47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50$

b) 26^{65}

c) $50!$

6. Legyenek a H halmaz elemei azok az egyszerű gráfok, amelyeknek a csúcshalmaza az $\{1, 2, \ldots, 2013\}$ halmaz. Bármely $G_1, G_2 \in H$ gráfok esetén jelölje $G_1 * G_2 \in H$ azt a gráfot, amelyet úgy nyerünk, hogy G_1 és G_2 élhalmazát egyesítjük, majd az így kapott gráfból töröljük az esetlegesen keletkező párhuzamos élek mindkét példányát. Csoportot alkot-e H a $*$ műveletre nézve?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2013. március 21.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

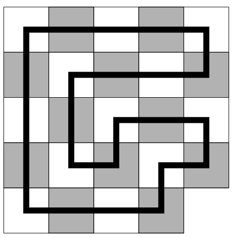
Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legyenek a G gráf csúcsai egy 5×5-ös sakktábla mezői és két különböző csúcs akkor legyen összekötve G-ben, ha a megfelelő mezők közös él mentén szomszédosak. A (24 csúcsú) G_1 gráfot úgy nyerjük G-ből, hogy a sakktábla egyik sarkának megfelelő csúcsot (az éleivel együtt) elhagyjuk G-ből. A (23 csúcsú) G_2 gráfot hasonlóan nyerjük G-ből, csak két átellenes sarkot hagyunk el.

a) Van-e G_1-ben Hamilton-kör? b) Van-e G_2-ben Hamilton-kör?

* * * * *

a) G_1-ben van Hamilton-kör, ilyet mutat például az alábbi ábra. (5 pont)



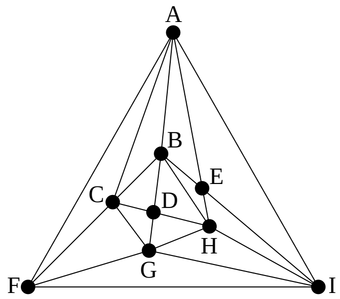
b) A sakktábla szokásos (a fenti ábrán is látható) színezését alapul véve G_2-ben 12 sötét és 11 világos mező van (vagy fordítva) és szomszédság csak különböző színű mezők között fordul elő. (2 pont)
Így a 11 világos mezőt elhagyva a maradék gráfnak 12 komponense lesz (mindegyik egy-egy izolált csúcs), így G_2-ben a tanult tétel miatt nincs Hamilton-kör. (3 pont)
Természetesen nem szükséges a b) feladatban a tanult tételt használni: mondhatjuk azt is, hogy mivel a mezők színei egy feltételezett Hamilton-kör mentén haladva váltakoznak, ezért az 1. és a 23. mező színe azonos, így nem lehetnek szomszédosak. Vagy akár hivatkozhatunk arra is, hogy mivel G_2 páros gráf, ezért nem lehet benne páratlan kör, így Hamilton-kör sem.

2. Létezik-e olyan két sorú A mátrix, amelynek minden eleme az $1, 2, \ldots, 30$ számok valamelyike, A bármely két szomszédos oszlopában álló négy elem páronként különböző és bárhogyan választjuk az x_1, x_2, y_1, y_2 páronként különböző, 1 és 30 közötti számokat, A-nak pontosan egy olyan, egymás melletti oszlopokból álló 2×2-es részmátrixa van, amelynek az egyik oszlopában x_1 és x_2, a másikban y_1 és y_2 áll (valamilyen sorrendben)?

* * * * *

Legyen G az a gráf, amelynek csúcsai az $\{1, 2, \ldots, 30\}$ halmaz kételemű részhalmazai és két csúcs akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. (2 pont)
A feladatbeli A mátrix pontosan akkor létezik, ha G-ben van Euler-út (vagy Euler-kör). Valóban, A minden oszlopa épp G egy-egy csúcsának felel meg (hiszen az oszlopban álló két elem különböző és a sorrendjük közömbös) és az egymás után következő oszlopok diszjunkt részhalmazoknak, vagyis G-beli éleknek felelnek meg. Továbbá a feladat szövege szerint G minden élének megfelelő két diszjunkt részhalmaz pontosan egyszer jelenik meg A-ban, mint szomszédos oszloppár. (4 pont)
G-ben egy tetszőleges csúcs foka $\binom{28}{2} = 378$, hiszen a csúcsnak megfelelő részhalmaz két elemétől különböző 28 elemből ennyiféleképp lehet kételemű részhalmazt kiválasztani. (2 pont)
G összefüggő, hiszen ha két részhalmaz nem diszjunkt (vagyis a megfelelő csúcsok nem szomszédosak), akkor bármely, mindkettőtől diszjunkt, kételemű részhalmazon keresztül vezet köztük 2 élű út.(1 pont)
Mivel G összefüggő és minden csúcsának foka páros, ezért van benne Euler-kör, így a kérdéses A mátrix létezik. (1 pont)

3. Határozzuk meg az alábbi G gráf kromatikus számát, $\chi(G)$-t és adjuk meg G egy jó színezését $\chi(G)$ színnel!



* * * * *

Megmutatjuk, hogy G csúcsai nem színezhetők meg 3 színnel. Tegyük fel ugyanis indirekt, hogy mégis. Ekkor bármely G-beli háromszög csúcsain fel kell használnunk mindhárom színt. Válasszuk például az A, F, I háromszöget: legyen A piros, F kék, I zöld. Ekkor G biztosan piros, hiszen már van kék és zöld szomszédja. Hasonlóan: H kék, mert már van piros és zöld szomszédja. Ekkor viszont E-nek már van mindhárom színű szomszédja, így nem kaphat színt; ellentmondás. (6 pont)
Négy színnel viszont már megszínezhetők G csúcsai, például így: legyen D, E és F piros; A és G kék; B és I zöld; és C és H sárga. (3 pont)
Mivel G 4 színnel megszínezhető, de 3-mal nem, ezért $\chi(G) = 4$. (1 pont)
Ha egy megoldó nem adja meg G egy helyes színezését, hanem ehelyett a négyszíntételre hivatkozik, az az utolsó 4 pontból csak 1-et kaphat meg (a $\chi(G) = 4$ állítás helyes indoklásáért). Megjegyezzük, hogy a három színnel nem színezhetőség indokolható valamivel rövidebben is: például az F, C, B, E, I 5 pontú kör színezéséhez biztosan kell 3 szín, de mivel az A csúcs szomszédos a kör minden csúcsával, ezért mindegyiktől különböző színű kell legyen.

4. A 2013 csúcsú G egyszerű gráfnak van 2009 darab 2011 fokú csúcsa. Mutassuk meg, hogy G perfekt!

* * * * *

$\overline{G}$ (G komplementere) egy 2013 csúcsú egyszerű gráf, amelynek van 2009 darab 1 fokú csúcsa.(2 pont)
Ezért $\overline{G}$ nem tartalmazhat legalább 5 pontú páratlan kört, vagy annak komplementerét feszített részgráfként, hiszen 1 fokú csúcs ilyen feszített részgráfban nyilván nem lehet, 1-nél nagyobb fokú csúcsból pedig csak 4 lehet. (3 pont)
Így a „nagy perfekt gráf tétel” szerint $\overline{G}$ perfekt, (3 pont)
amiből Lovász tétele szerint következik, hogy G is perfekt. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a feladat a „nagy perfekt gráf tételre” való hivatkozás nélkül is megoldható: ehhez csak azt kell megfigyelni, hogy egy 1 fokú csúcs hozzávétele sem $\omega(G)$, sem $\chi(G)$ értékét nem befolyásolja – feltéve, hogy ezek értéke legalább 2.

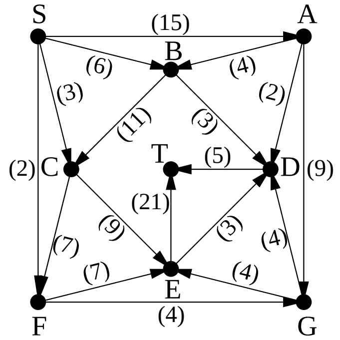
5. A $G(A, B; E)$ egyszerű, páros gráfban $|A| = |B| = n$ (valamely $n \geq 1$ egészre) és bármely nemszomszédos $u \in A$ és $v \in B$ csúcsok esetén $d(u) + d(v) \geq n$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-ben van teljes párosítás!

* * * * *

Mivel $|A| = |B| = n$, ezért azt kell megmutatnunk, hogy van (például) A-t lefedő párosítás. (1 pont)
Ehhez a Hall-tétel szerint azt kell belátnunk, hogy bármely $X \subseteq A$ részhalmazra $|N(X)| \geq |X|$. Tegyük fel ezért indirekt, hogy valamely $X \subseteq A$-ra ez nem teljesül: $|X| = k$, de $|N(X)| \leq k - 1$. (2 pont)
Válasszuk az $u \in A$ és $v \in B$ csúcsokat úgy, hogy $u \in X$ és $v \notin N(X)$ teljesüljön. (1 pont)
Mivel $v \notin N(X)$, ezért v nemszomszédos X-belivel, így egyrészt u és v nemszomszédos, (1 pont)
másrészt v csak az $n - k$ elemszámú $A \setminus X$ halmaz csúcsaival lehet szomszédos. Ezért $d(v) \leq n - k$ (hiszen G egyszerű gráf). (2 pont)
Hasonlóan, u csak $N(X)$-beliekkel szomszédos, így $d(u) \leq k - 1$. (1 pont)
Tehát u és v nemszomszédos és $d(u) + d(v) \leq (k - 1) + (n - k) = n - 1$, ami ellentmond a feladat feltételének. Ez az ellentmondás bizonyítja a Hall-feltétel teljesülését és ezzel a feladat állítását.(2 pont)

6. a) Határozzuk meg az alábbi hálózatban az $\{S, E, F\}$ csúcshalmaz és a maradék csúcsok között vezető élek alkotta vágás értékét (más néven kapacitását)!

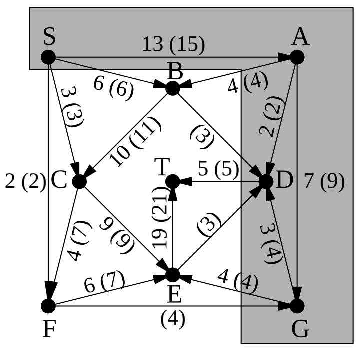
b) Adjunk meg a hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be)!



* * * * *

a) Az $\{S, E, F\}$ halmazból kilépő élek: $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{ET}$ és $\overrightarrow{FG}$. Ezeknek az összkapacitása, vagyis a vágás értéke (kapacitása) pedig $15 + 6 + 3 + 3 + 21 + 4 = 52$. (3 pont)

b) Az alábbi ábrán látható folyam értéke 24. (A 0 folyamértékeket nem jelöltük.) (2 pont)
Az ugyancsak az ábrán látható vágás (tehát az $\{S, A, D, G\}$ halmaz és a maradék csúcsok között futó élek halmaza) értéke (tehát az $\{S, A, D, G\}$ halmazból a maradék csúcsok halmazába menő élek összkapacitása) szintén 24. (3 pont)
Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás értéke, (1 pont)
ezért a 24 értékű vágás bizonyítja, hogy a 24 értékű folyam maximális. (1 pont)
Az utolsó 2 pont tehát annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális. (Például az „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális” mondat – további kiegészítés híján – *nem* tekintendő (érdemi) indoklásnak.) A folyam maximalitása mellett lehet úgy is érvelni, hogy a 24 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út.



Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2013. április 25.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Az alábbi mátrix egy hurokélmentes, irányított gráf illeszkedési mátrixa. Adjuk meg a hiányzó ($\square$-val jelölt) elemeket és rajzoljuk le a gráfot!

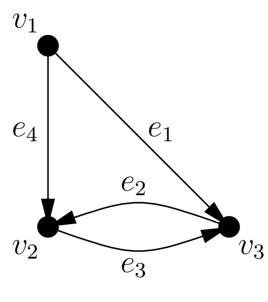
$$\begin{pmatrix} 1 & \square & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \square & \square \\ \square & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Az illeszkedési mátrix definíciójából következik, hogy annak minden oszlopában 1 darab 1-es és 1 darab (-1)-es található, az összes többi elem 0. Ez alapján már a mátrix minden hiányzó eleme megállapítható:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(5 pont)}$$

A mátrix ismeretében pedig a gráf már (definíció szerint) rekonstruálható: ha v_1, v_2, illetve v_3 jelöli sorban lefelé haladva a mátrix sorainak megfelelő csúcsokat és hasonlóan $e_1, \ldots, e_4$ az oszlopoknak megfelelő éleket, akkor az alábbi gráfot kapjuk:



(5 pont)

Ha egy megoldó felcseréli a mátrixbeli 1-esek és (-1)-esek szerepét (és így a fenti ábrához képest minden élt fordítva rajzol), az ezért 1 pontot veszítsen.

2. A legalább négy pontú G gráf bármely két, nemszomszédos pontja között található G-ben három, páronként éldiszjunkt út. Mutassuk meg, hogy G-nek bármely két szomszédos pontja között is található három, páronként éldiszjunkt út!

* * * * *

Legyenek s és t szomszédos pontjai G-nek és tegyük fel indirekt, hogy ezek között nem létezik három, páronként éldiszjunkt út G-ben. Ekkor Menger megfelelő (irányítatlan gráfbeli éldiszjunkt utakra vonatkozó) tétele szerint kell legyen G-ben két olyan él – jelölje ezeket e_1 és e_2 – amelyek az összes, s és t közötti utat lefogják. (Megjegyezzük, hogy e_1 és e_2 egyike nyilván az s és t közötti él kell legyen – de ez a megoldás szempontjából közömbös.) (2 pont)
Ekkor az e_1 és e_2 elhagyásával kapott G' gráf már nem összefüggő, így a csúcsai szétoszthatók a V_1 és V_2 nemüres halmazokra úgy, hogy G'-nek nincs V_1-beli csúcsot V_2-belivel összekötő éle.(2 pont)
Ha most $v_1 \in V_1$ és $v_2 \in V_2$ tetszőlegesek, akkor nyilván nem lehet v_1 és v_2 között három, páronként éldiszjunkt út G-ben, mert e_1 és e_2 a v_1 és v_2 közötti utakat is lefogják. (2 pont)
Ezért (a feladat feltétele szerint) v_1-nek és v_2-nek szomszédosaknak kell lenniük G-ben. (2 pont)
Mivel ez bármely $v_1 \in V_1$ és $v_2 \in V_2$ csúcspárról elmondható, ezért G-ben legalább $|V_1| \cdot |V_2|$ olyan élnek kell lenni, ami V_1-beli csúcsot köt össze V_2-belivel. Ez azonban ellentmondás: egyrészt $|V_1| + |V_2| \geq 4$ miatt $|V_1| \cdot |V_2| \geq 3$, másrészt V_1 és V_2 között G-ben csak az e_1 és e_2 élek mehetnek. Ez az ellentmondás bizonyítja a feladat állítását. (2 pont)

3. Egy egész szám 222-vel vett osztási maradéka 4-gyel kisebb, mint a szám 60-szorosának a 222-vel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 222-vel osztva?

* * * * *

A keresett számot n-nel jelölve a feladat szövege szerint $n \equiv 60n - 4 \pmod{222}$. (1 pont)
Átrendezve az $59n \equiv 4 \pmod{222}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)
4-gyel szorozva: $236n \equiv 16 \pmod{222}$, vagyis $14n \equiv 16 \pmod{222}$. (1 pont)
2-vel osztva: $7n \equiv 8 \pmod{111}$, ahol $(2, 222) = 2$ miatt kellett a modulust 2-vel osztani.(1 pont)
16-tal szorozva: $112n \equiv 128 \pmod{111}$, vagyis $n \equiv 17 \pmod{111}$. (2 pont)
Ebből $n \equiv 17 \pmod{222}$ vagy $n \equiv 17 + 111 = 128 \pmod{222}$. (1 pont)
Ellenőrzéssel kiderül, hogy a 17 hamis gyök (ami a 4-gyel szorzás miatt jött be, ami nem ekvivalens lépés, mert $(222, 4) > 1$). Így a megoldás $n \equiv 128 \pmod{222}$ (vagyis a kérdéses szám 128 maradékot adhat 222-vel osztva). (3 pont)
A lineáris kongruencia nagyon sokféleképp megoldható jól (akár hamis gyököt behozó lépés nélkül is). Aki a fenti megoldást, vagy más, hamis gyököt behozó megoldást ad, de nem foglalkozik a hamis gyök kiszűrésével, az értelemszerűen 3 pontot veszítsen. Ha valaki csak azt ellenőrzi, hogy $(59, 222)|4$, így a kongruenciának van megoldása, de a megoldást kiszámolni nem tudja, az (az átrendezéssel együtt) összesen 3 pontot kapjon. Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb.

4. Egy n egész szám 3 maradékot ad 82-vel osztva. Milyen maradékot adhat az n szám 182-vel osztva?

* * * * *

A feladat azt kérdezi, hogy az $n \equiv 3 \pmod{82}$, $n \equiv a \pmod{182}$ kongruenciarendszernek milyen $a \in \{0, 1, \ldots, 181\}$ értékekre van megoldása. (2 pont)
Az első kongruenciából $n = 82k + 3$ valamilyen $k \in \mathbb{Z}$ esetén. (1 pont)
Ezt a másodikba helyettesítve: $82k + 3 \equiv a \pmod{182}$. (1 pont)
Átrendezés után a $82k \equiv a - 3 \pmod{182}$ lineáris kongruenciára jutunk. (1 pont)
A tanult tétel szerint ez pontosan akkor megoldható, ha $(82, 182)|a - 3$. (2 pont)
Mivel $(82, 182) = 2$, ezért ez azzal ekvivalens, hogy $2|a - 3$, vagyis hogy a páratlan szám.(1 pont)
Tehát n bármilyen páratlan maradékot $(1, 3, 5, \ldots, 181)$ adhat maradékul 182-vel osztva.(2 pont)
Természetesen nem jár pontlevonás azért, ha valaki a fenti megoldás első mondatát nem írja le, de a megoldásból kiderül, hogy valójában a paraméteres kongruenciarendszert oldja meg.

5. Hány olyan n egész szám van 1 és 100 között, amelyre $(n+51!)^{52}-1$ osztható 53-mal?

* * * * *

Mivel 53 prím, ezért Wilson tétele szerint $52! \equiv -1 \pmod{53}$, (1 pont)
vagyis $52! \equiv 52 \pmod{53}$. (1 pont)
Ezt 52-vel osztva: $51! \equiv 1 \pmod{53}$, ahol a modulus $(52,53)=1$ miatt nem változott. (1 pont)
Mindkét oldalhoz n-et adva, majd 52-edik hatványra emelve:

$$(n+51!)^{52} \equiv (n+1)^{52} \pmod{53}.$$ (1 pont)

Mivel 53 prím, ezért $\varphi(53)=52$, (1 pont)
így az Euler-Fermat tétel miatt $a^{52} \equiv 1 \pmod{53}$ teljesül minden 53-hoz relatív prím, vagyis 53-mal nem osztható a-ra. (1 pont)
Összevetve az eddigieket: ha $n+1$ nem osztható 53-mal, akkor

$$(n+51!)^{52} \equiv (n+1)^{52} \equiv 1 \pmod{53},$$

vagyis $(n+51!)^{52}-1$ osztható 53-mal. (2 pont)
Ha viszont $n+1$ osztható 53-mal, akkor nyilván $(n+1)^{52}$ is osztható 53-mal, így a fentiek szerint $(n+51!)^{52}$ is. Ezért ilyenkor $(n+51!)^{52}-1$ nem osztható 53-mal. (1 pont)
Következésképp 1 és 100 között 99 darab olyan n van, amelyre $(n+51!)^{52}-1$ osztható 53-mal: az 52 kivételével mindegyik. (1 pont)

6. Legyen $H=\{a,b,c,d,p,q,r,s\}$ és értelmezzük a H halmazon a $*$ műveletet az alábbi műveleti tábla szerint:

$*$	a	b	c	d	p	q	r	s
a	b	q	d	r	a	p	s	c
b	q	p	r	s	b	a	c	d
c	s	r	b	a	c	d	p	q
d	c	s	q	b	d	r	a	p
p	a	b	c	d	p	q	r	s
q	p	a	s	c	q	b	d	r
r	d	c	p	q	r	s	b	a
s	r	d	a	p	s	c	q	b

(A műveleti tábla használata magától értetődő: az $x*y$ művelet eredménye az x-nek megfelelő sor és az y-nak megfelelő oszlop kereszteződésében található. Így például $q*c=s$ és $b*q=a$.)
Döntsük el, hogy a H halmaz csoportot, illetve Abel-csoportot alkot-e a $*$ műveletre nézve, ha azt már tudjuk, hogy $*$ asszociatív! (Az asszociativitást tehát nem kell ellenőrizni.)

* * * * *

A műveleti táblából látszik, hogy $*$-ra nézve p egységelem, mert $x*p=p*x=x$ minden $x\in H$ elemre igaz. (2 pont)
Ezért a inverze q (és viszont), mert $a*q=q*a=p$. Hasonlóan látszik, hogy c és r egymás inverzei, d és s is egymás inverzei és b és p sajátmaguk inverzei. (3 pont)
Mivel a művelet asszociatív, van egységelem és minden elemnek van inverze, ezért $(H,*)$ csoport. (2 pont)
Viszont $*$ nem kommutatív: például $a*c=d$, de $c*a=s$. Így $(H,*)$ nem Abel-csoport.(3 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

Pontozási útmutató

2013. május 16.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \dots, 20\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $x \cdot y$ osztható 3-mal vagy 5-tel (vagy mindkettővel).

a) Van-e G-ben Hamilton-út?

b) Van-e G-ben Hamilton-kör?

* * * * *

G-ből elhagyva a 3-mal vagy 5-tel osztható számokat csupa izolált pontból álló gráfot kapunk. (3 pont)
Ezzel 9 pontot hagyunk el (3,5,6,9,10,12,15,18,20) és a maradék gráfnak 11 komponense lesz, (3 pont)
ezért a tanult tétel értelmében nincs benne Hamilton-út, (3 pont)
így Hamilton-kör sem. (1 pont)

2. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{100, 101, \dots, 200\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $(x, y) \geq 10$ (ahol (x, y) az x és y legnagyobb közös osztóját jelöli). Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t.

* * * * *

A $100, 110, 120, \dots, 190, 200$ csúcsok 11 pontú klikket alkotnak G-ben, hiszen közülük bármely kettőnek a 10 közös osztója. (4 pont)
11 színnel viszont G csúcsai könnyen megszínezhetők. Ugyanis színezzük a $100, 101, \dots, 109$ csúcsokat egy színnel, a $110, 111, \dots, 119$ csúcsokat egy következővel, stb., a $190, 191, \dots, 199$ csúcsok kapják a tizedik színt, végül egyedül a 200 kapja a tizenegyedik színt. (2 pont)
Ez a színezés jó lesz, hiszen azonos színnel színezett csúcsok különbsége mindig legföljebb 9, így nem lehet 9-nél nagyobb közös osztójuk. (2 pont)
Mivel G-ben van 11 csúcsú klikk, ezért $\chi(G) \geq 11$, (1 pont)
másrészt mivel G csúcsai 11 színnel színezhetők, ezért $\chi(G) = 11$. (1 pont)

3. Határozzuk meg egy 6 csúcsú kör komplementerének élkromatikus számát!

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Jelölje a kör csúcsait sorrendben körbe haladva $v_1, v_2, \ldots, v_6$, a kör komplementerét G.
G-ben minden pont foka 3, így $\chi_e(G) \geq 3$. (3 pont)
Másrészt 3 színnel G éleit könnyű megszínezni: a $\{v_1, v_5\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_6\}$ élek legyenek pirosak, a $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_6\}$, $\{v_3, v_5\}$ élek kékek és a $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_5\}$, $\{v_4, v_6\}$ élek zöldek. (6 pont)
Tehát $\chi_e(G) = 3$. (1 pont)

4. A G perfekt gráf tartalmaz 2013 csúcsú kört. Igaz-e feltétlenül, hogy G tartalmaz 3 csúcsú kört?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Mivel G-ben van páratlan (2013 csúcsú) kör, ezért a tanult tétel értelmében nem páros gráf, (2 pont)
így $\chi(G) \geq 3$. (2 pont)
G perfekt, ezért $\chi(G) = \omega(G)$, (2 pont)
így $\omega(G) \geq 3$ is igaz. (2 pont)
Ezért G-ben van 3 pontú klikk, vagyis 3 pontú kör, így az állítás igaz. (2 pont)

5. A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az $\{a_1, a_4, a_7, b_2, b_5, b_6, b_9\}$ lefogó ponthalmaz G-ben (ez a feladatban megadott mátrixból könnyen ellenőrizhető). (4 pont)
G-ben könnyű mutatni 7 élű párosítást: például az $\{a_1, b_4\}$, $\{a_2, b_6\}$, $\{a_3, b_9\}$, $\{a_4, b_3\}$, $\{a_5, b_2\}$, $\{a_6, b_5\}$ és az $\{a_7, b_1\}$ élek. (3 pont)
A megadott lefogó ponthalmaz, illetve párosítás bizonyítja, hogy $\tau(G) \leq 7$, illetve $\nu(G) \geq 7$. Ebből a $\nu(G) \leq \tau(G)$ összefüggés miatt következik, hogy $\nu(G) = \tau(G) = 7$, vagyis a megadott lefogó ponthalmaz minimális és a megadott párosítás maximális. (3 pont)
Megjegyezzük, hogy a fenti nem az egyetlen 7 elemű lefogó ponthalmaz: $\{a_1, a_3, a_4, a_7, b_2, b_5, b_6\}$ is ilyen. A maximális párosítást és a minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges ennek a lépéseit dokumentálni.

6. Legyen adott egy G irányított gráf, az $s \in V(G)$ csúcs és a $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ kapacitásfüggvény. Jelölje minden $v \in V(G)$, $v \neq s$ esetén $m(v)$ az s-ből a v-be vezető maximális folyam értékét. Tegyük fel, hogy valamely $t \in V(G)$ csúcsra $m(t) = 100$, de minden $v \in V(G)$, $v \neq s, t$ esetén $m(v) > 100$. Mutassuk meg, hogy ekkor a t-be érkező élek összkapacitása 100.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Mivel az s-ből t-be vezető maximális folyam értéke 100, ezért a Ford-Fulkerson tétel miatt a minimális st-vágás kapacitása is 100. Legyen C egy 100 kapacitású st-vágás. (2 pont)
Ha volna olyan $v \neq t$ csúcs, amely a C-beli élek elhagyása után t-vel egy oldalon van, akkor C egyben 100 kapacitású sv-vágás is volna, amiből $m(v) \leq 100$ következne. Ez ellentmond a feladatban írt feltételnek, így ilyen v nem lehet. (5 pont)
Így C kapacitása definíció szerint a t-be érkező élek összkapacitása, amivel az állítást beláttuk. (3 pont)

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az MÁSODIK zárthelyi pótlására

Pontozási útmutató

2013. május 16.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Az alábbi mátrix egy egyszerű, összefüggő gráf szomszédossági mátrixa. Adjuk meg a hiányzó ($\square$-val jelölt) elemeket és rajzoljuk le a gráfot!

$$\begin{pmatrix} \square & 0 & \square & 0 & \square \\ \square & \square & \square & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & 1 & 0 & \square & 0 \\ 0 & \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

* * * * *

Jelölje a gráf csúcsait az oszlopok és sorok sorrendjének megfelelően $v_1, v_2, \ldots, v_5$, a mátrixot A.

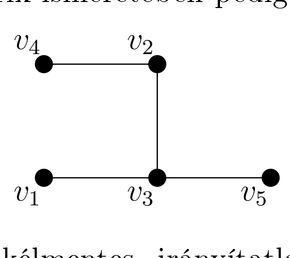
Mivel a gráf egyszerű, ezért nincs benne hurokél, így a főátló minden eleme 0. (1 pont)

A szomszédossági mátrix (irányítatlan gráf esetén) a főátlóra szimmetrikus (hiszen $a_{i,j}$ és $a_{j,i}$ is a v_i és v_j közti élek száma). Ez alapján a megadott 7 elem „tükörképe” kitölthető. (2 pont)

Látszik, hogy v_1 és v_5 sorában és oszlopában minden elem 0, kivéve a harmadikat, ami egyelőre ismeretlen. Mivel azonban a gráf összefüggő, v_1 és v_5 nem lehetnek izolált csúcsok, vagyis mindkettő szomszédos v_3-mal. Ezek alapján $a_{1,3} = a_{3,1} = a_{5,3} = a_{3,5} = 1$. (2 pont)

Már csak $a_{2,3}$ és $a_{3,2}$ (közös) értéke nem ismert. Azonban ha v_2 és v_3 nem volnának szomszédosak, akkor a $\{v_1, v_3, v_5\}$ és a $\{v_2, v_4\}$ csúcshalmazok külön komponenseket feszítenének, a gráf nem volna összefüggő. Így $a_{2,3} = a_{3,2} = 1$. (2 pont)

A szomszédossági mátrix ismeretében pedig a gráf már lerajzolható:



(3 pont)

2. Legyen G egy hurokélmentes, irányítatlan gráf és $s \in V(G)$ egy rögzített csúcs. Jelölje minden $v \in V(G)$, $v \neq s$ esetén $\lambda(v)$ az s-ből a v-be vezető, páronként éldiszjunkt utak maximális számát. Tegyük fel, hogy valamely $t \in V(G)$ csúcsra $\lambda(t) = 10$, de minden $v \in V(G)$, $v \neq s, t$ esetén $\lambda(v) > 10$. Mutassuk meg, hogy ekkor t foka 10.

* * * * *

$\lambda(t) = 10$ miatt s-ből t-be nem létezik 11 darab páronként éldiszjunkt út, ezért Menger megfelelő tétele miatt van G-ben egy 10 elemű Z élhalmaz, amely lefogja az s és t közti utakat. (2 pont)
Z elhagyása után tehát a gráf több komponensre esik és s és t különböző komponensbe kerül. Jelölje a t-t tartalmazó (Z elhagyása utáni) komponens csúcshalmazát T. (1 pont)
Z minden élének egyik végpontja T-ben van, különben az s és t közti utak 10-nél kevesebb éllel is lefoghatók volnának, ami ellentmond $\lambda(t) = 10$-nek. (2 pont)
Ha létezne egy $v \in T$, $v \neq t$ csúcs, akkor Z az s és v közötti utakat is lefogná, amiből $\lambda(v) \leq 10$ következne. Ez ellentmond a feladatban írt feltételnek, így ilyen v nem lehet. (3 pont)
Így Z élei épp a t-re illeszkedő élek, vagyis t foka 10. (2 pont)

3. Egy egész számra teljesül, hogy $37n + 9$ és $n + 10$ azonos maradékot ad 235-tel osztva. Mi lehet ez a közös maradék?

* * * * *

A keresett számot n-nel jelölve a feladat szövege szerint $37n + 9 \equiv n + 10 \pmod{235}$. (1 pont)
Átrendezve a $36n \equiv 1 \pmod{235}$ lineáris kongruenciát kapjuk. (1 pont)
7-tel szorozva: $252n \equiv 7 \pmod{235}$, vagyis $17n \equiv 7 \pmod{235}$. (1 pont)
14-gyel szorozva: $238n \equiv 98 \pmod{235}$, vagyis $3n \equiv 98 \pmod{235}$. (2 pont)
$98 \equiv 333 \pmod{235}$ miatt ugyanez $3n \equiv 333 \pmod{235}$ alakba is írható. (1 pont)
3-mal osztva: $n \equiv 111 \pmod{235}$, ahol a modulus $(3, 235) = 1$ miatt nem változott. (2 pont)
Ebből $n + 10 \equiv 121 \pmod{235}$, így a közös maradék 121. (2 pont)

4. Egy n egész szám 3 maradékot ad 72-vel osztva. Milyen maradékot adhat 102-vel osztva a $2n + 7$ szám?

* * * * *

A feladat azt kérdezi, hogy az $n \equiv 3 \pmod{72}$, $2n+7 \equiv a \pmod{102}$ kongruenciarendszernek milyen $a \in \{0, 1, \ldots, 101\}$ értékekre van megoldása. (2 pont)
Az első kongruenciából $n = 72k + 3$ valamilyen $k \in \mathbb{Z}$ esetén. (1 pont)
Ezt a másodikba helyettesítve: $2(72k + 3) + 7 = 144k + 13 \equiv a \pmod{102}$. (1 pont)
Átrendezés után a $144k \equiv a - 13 \pmod{102}$ lineáris kongruenciára jutunk. (1 pont)
A tanult tétel szerint ez pontosan akkor megoldható, ha $(144, 102) | a - 13$. (2 pont)
Mivel $(144, 102) = 6$, ezért ez azzal ekvivalens, hogy $6 | a - 13$, vagyis hogy $a \equiv 13 \pmod{6}$, azaz $a \equiv 1 \pmod{6}$. (1 pont)
Tehát $2n + 7$ lehetséges maradékai 102-vel osztva a 6-tal osztva 1 maradékot adó számok $(1, 7, 13, \ldots, 97)$. (2 pont)
Természetesen nem jár pontlevonás azért, ha valaki a fenti megoldás első mondatát nem írja le, de a megoldásból kiderül, hogy valójában a paraméteres kongruenciarendszert oldja meg.

5. Mi az utolsó két számjegye a 11-es számrendszerben a (10-es számrendszerben felírt) $42^{41^{40}}$ számnak?

* * * * *

A feladat azt kérdezi, hogy $42^{41^{40}}$ milyen maradékot ad 121-gyel osztva. (1 pont)
Mivel $\varphi(121) = \varphi(11^2) = 11^2 - 11 = 110$ (1 pont)
és $(42, 121) = 1$, (1 pont)
ezért az Euler-Fermat tétel miatt $42^{110} \equiv 1 \pmod{121}$. (1 pont)
Ezt tetszőleges $k \geq 1$ egészre k-adik hatványra emelhetjük: $42^{110k} \equiv 1^k = 1 \pmod{121}$. (1 pont)
Mivel $\varphi(110) = \varphi(2 \cdot 5 \cdot 11) = 1 \cdot 4 \cdot 10 = 40$ és $(41, 110) = 1$, (1 pont)
ezért az Euler-Fermat tétel miatt $41^{40} \equiv 1 \pmod{110}$. (1 pont)
Ezért $41^{40} = 110k + 1$ valamely $k \geq 1$ egészre. Ebből $42^{41^{40}} = 42^{110k+1} = 42^{110k} \cdot 42$. (1 pont)
Így a fentebb látott $42^{110k} \equiv 1 \pmod{121}$ kongruencia miatt $42^{41^{40}} \equiv 42 \pmod{121}$. (1 pont)
Ezért ($42 = 3 \cdot 11 + 9$ miatt) $42^{41^{40}}$ utolsó két számjegye a 11-es számrendszerben 39. (1 pont)

6. A G (tetszőleges) csoport a, b, c és d (különböző) elemeire fennállnak az $a * b = a$, $c * d = b$ és $a * c = d$ összefüggések (ahol a G műveletét $*$-gal jelöltük). Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül:

(i) az állítás biztosan igaz;

(ii) az állítás biztosan hamis;

(iii) az állítás lehet igaz is és hamis is (G és a, b, c, d választásától függően).

a) $c^{-1} \in \{a, b, c, d\}$

b) $c * a \in \{a, b, c, d\}$

c) $d * a \in \{a, b, c, d\}$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az $a * b = a$ egyenlet mindkét oldalát balról a^{-1}-zel szorozva: $a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * a$. Itt $a^{-1} * (a * b) = (a^{-1} * a) * b = e * b = b$ és $a^{-1} * a = e$, ahol e az egységelemet jelöli. Tehát $b = e$. (1 pont)

Így a $c * d = b$ egyenletből ($b = e$-t használva és balról c^{-1}-zel szorozva) kapjuk, hogy $c^{-1} = d$.(1 pont)

Ezért a $c^{-1} \in \{a, b, c, d\}$ állítás biztosan igaz. (1 pont)

Az $a * c = d$-ből $c^{-1} = d$-t használva $a * c = c^{-1}$ adódik. Ezt balról c-vel szorozva: $c * a * c = c * c^{-1} = e$. Jobbról c^{-1}-zel szorozva: $c * a * c * c^{-1} = e * c^{-1}$, vagyis $c * a = c^{-1}$. Mivel $c^{-1} = d$, ezért a $c * a \in \{a, b, c, d\}$ állítás is biztosan igaz. (3 pont)

A $d * a \in \{a, b, c, d\}$ állítás viszont lehet igaz is és hamis is, aminek igazolására két példát mutatunk. Legyen például $(G, *) = (\mathbb{Z}, +)$ (vagyis a feladatbeli csoportot válasszuk az egészek összeadással vett csoportjának) és legyen $a = -2$, $b = 0$, $c = 1$ és $d = -1$. Ekkor a feladatban írt három összefüggés valóban teljesül: $a * b = (-2) + 0 = -2 = a$, $c * d = 1 + (-1) = 0 = b$ és $a * c = (-2) + 1 = -1 = d$. Viszont $d * a = (-1) + (-2) = -3 \notin \{a, b, c, d\}$. (2 pont)

Másrészt legyen a $(G, *)$ csoport a $\{0, 1, 2, 3\}$ halmaz a modulo 4 összeadással (amit $\oplus$-szal jelölünk). Előadásról ismert, hogy ez (ciklikus) csoport. Legyen $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$ és $d = 3$. Ekkor a feladatban írt három összefüggés megint teljesül: $a * b = 2 \oplus 0 = 2 = a$, $c * d = 1 \oplus 3 = 0 = b$ és $a * c = 2 \oplus 1 = 3 = d$. Most viszont $d * a = 3 \oplus 2 = 1 = c \in \{a, b, c, d\}$. (2 pont)