Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2012. március 12.

1. Egy 8 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van (pontosan) 4 hosszú kör.

2. Egy képzeletbeli nyelv hangkészlete 10 magánhangzóból és 21 mássalhangzóból áll. Ezen a nyelven nincsenek kettős hangzók és tilos a mássalhangzótorlódás; vagyis sem két azonos hang, sem két különböző mássalhangzó soha nem állhat egymás mellett. (Viszont minden más lehetséges, vagyis bármely két különböző hang állhat egymás után, ha legalább az egyikük magánhangzó.) Legföljebb milyen hosszú megengedett hangsor készíthető ezen a nyelven, ha a bármely hang többször is felhasználható, de további feltétel, hogy bármely két különböző hang legföljebb egyszer állhat egymás mellett a hangsorban?

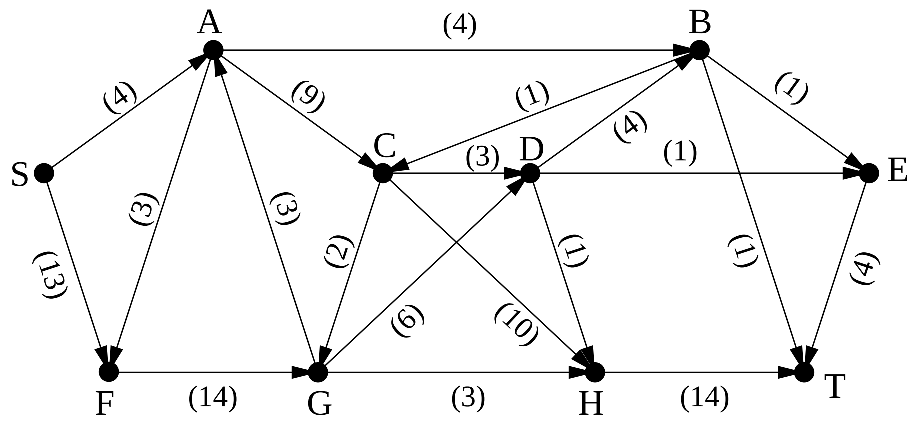
3. Legyenek a G gráf csúcsai a (8×8-as) sakktábla mezői és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha egy királynak legalább két lépésre van szüksége ahhoz, hogy az egyikről a másikra jusson. Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t! (A sakkban a király egy lépésben bármely mezőről egy azzal akár közös él mentén, akár közös csúcs mentén szomszédos mezőre léphet.)

4. A 10 csúcsú G gráf két (közös csúcs nélküli) 5 pontú útból készült úgy, hogy az egyik út minden csúcsát összekötöttük a másik út minden csúcsával. Határozzuk meg $\chi_e(G)$-t, G élkromatikus számát!

5. A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Minden $1 \le i, j \le 8$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy minimális lefogó ponthalmazt!

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&0&1&0&1&1\\ 1&1&0&1&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be) és egy minimális vágást!



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok

2012. április 19.

1. Egy öt csúcsú egyszerű gráf szomszédossági mátrixának harmadik hatványában a főátló elemeinek szorzata 64. Mutassuk meg, hogy a gráf kétszeresen élösszefüggő.

2. A 15 pontú G gráf egy 4 pontú, egy 5 pontú és egy 6 pontú körből készült úgy, hogy az 5 pontú kör minden csúcsát összekötöttük (egyetlen éllel) a másik két kör minden csúcsával. Legyen s a 4 pontú kör egyik csúcsa, t pedig a 6 pontú kör egyik csúcsa.

a) Maximálisan hány páronként csúcsdiszjunkt út adható meg s és t között G-ben?

b) Maximálisan hány páronként éldiszjunkt út adható meg s és t között G-ben?

3. Milyen maradékot adhat egy egész szám 153-mal osztva, ha a 31-szerese 10 maradékot ad 153-mal osztva?

4. Hány olyan 2012-nél kisebb pozitív egész szám van, amely 19-cel osztva 10 maradékot ad és 37-tel osztva 15 maradékot ad?

5. Legyen $p > 2$ olyan prímszám, amelyre $2p+1$ is prím. Bizonyítsuk be, hogy ekkor fennáll az alábbi kongruencia:

$$(p-1)^{(p-2)^{p-1}} \equiv p-1 \pmod{2p+1}$$

6. Legyen $H = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0\}$, vagyis H a térnek azokból a vektoraiból áll, amelyeknek az első két koordinátája nem 0. Értelmezzük H-n a $*$ műveletet a következőképpen:

$$(a, b, c) * (d, e, f) = (ad, be, af + ce)$$

(Így tehát például $(1, 2, 3) * (4, 5, 6) = (4, 10, 21)$.) Döntsük el, hogy H csoportot alkot-e $*$-ra nézve!

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2012. május 7.

1. A 10 csúcsú G gráf két (közös csúcs nélküli) 5 pontú útból készült úgy, hogy az egyik út minden csúcsát összekötöttük a másik út minden csúcsával. Legföljebb hány élből állhat G-ben egy olyan élsorozat, amelyben G minden éle legföljebb egyszer szerepelhet?

2. A 30 csúcsú G gráf egy 4 pontú, egy 5 pontú, egy 6 pontú, egy 7 pontú és egy 8 pontú körből készült úgy, hogy a 4 pontú kör minden csúcsát összekötöttük a másik négy kör minden csúcsával.

a) Van-e G-ben Hamilton-út? b) Van-e G-ben Hamilton-kör?

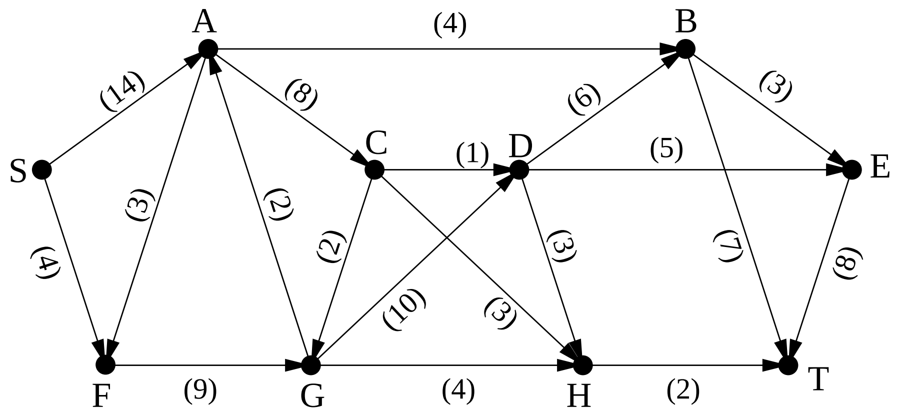
3. Legyenek a G gráf csúcsai a (8×8-as) sakktábla mezői és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő mezők vagy él mentén szomszédosak a sakktáblán, vagy legalább az egyikük a sakktábla szélén helyezkedik el. Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t! (A feladatbeli „vagy” nem kizáró, vagyis két csúcs akkor is szomszédos, ha mindkét feltétel teljesül. A sakktábla széle alatt a legfelső és a legalsó sor, valamint a balszélső és a jobbszélső oszlop mezőit értjük.)

4. Egy 2012 pontú kör minden élét helyettesítettük 3 vagy 4 párhuzamos éllel; hogy éppen 3-mal vagy 4-gyel, azt minden élre véletlenszerűen döntöttük el. Mutassuk meg, hogy a kapott G gráfra $\chi_e(G) = \Delta(G)$ teljesül (ahol $\chi_e(G)$ a gráf élkromatikus számát, $\Delta(G)$ pedig a G-beli maximális fokszámot jelöli).

5. A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Minden $1 \le i \le 9$ és $1 \le j \le 8$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális méretű párosítást!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy minimális vágást (S és T között)!



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2012. május 7.

1. A 100 csúcsú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább 2. A G gráffal gondolatban a következő kísérletet végezzük: az összes lehetséges módon kiválasztunk G csúcsai közül két különbözőt és a kiválasztott csúcsokat elhagyjuk G-ből. Azt kapjuk, hogy a kísérletek közül 98 esetben a maradék gráf nem összefüggő, de az összes többi esetben igen. Határozzuk meg a legnagyobb k számot, amelyre G k-szorosan összefüggő.

2. Egy G egyszerű gráf minden csúcsában lakik egy bogárka. Egy adott pillanatban minden bogárka felkerekedik és átköltözik a gráf egy, a jelenlegi lakhelyével szomszédos csúcsába. A bogárkák ezt úgy szeretnék megtenni, hogy végül ismét minden csúcsban egyetlen bogárka lakjon. Bizonyítsuk be, hogy ha G szomszédossági mátrixának a determinánsa nem nulla, akkor a bogárkák terve megvalósítható!

3. Milyen maradékot ad 5^{73}-nal osztva $16^{5^{73}}$?

4. Egy egész szám 199-cel vett osztási maradéka 1-gyel nagyobb, mint a szám 43-szorosának a 199-cel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 199-cel osztva?

5. Hány olyan n egész szám van 1 és 1000 között, amelyhez található olyan m egész szám, hogy a $37n + 218m = 10$ egyenlet fennálljon?

6. Értelmezzük a síkvektorok $\mathbb{R}^2$ halmazán a $*$ és a $\diamond$ műveleteket a következőképpen:

$$(a, b) * (c, d) = (a + d, bc) \qquad (a, b) \diamond (c, d) = (a + c, bd)$$

a) Döntsük el, hogy $\mathbb{R}^2$ csoportot alkot-e $*$-ra nézve!

b) Döntsük el, hogy $\mathbb{R}^2$ csoportot alkot-e $\diamond$-ra nézve!

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

2012. május 15.

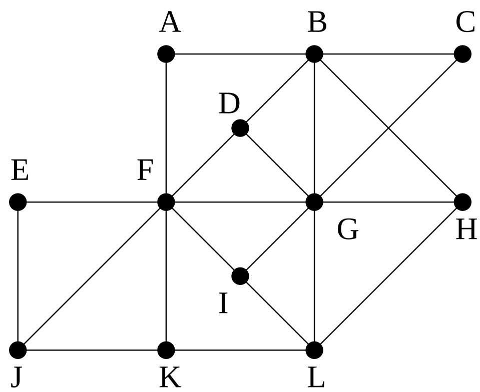
1. Minimálisan hány élből áll a $K_{10,11}$ teljes páros gráfban egy olyan élsorozat, amely a gráf összes élét tartalmazza? (A $K_{10,11}$ teljes páros gráf egyik pontosztályában 10, a másikban 11 pont van és bármely két, különböző pontosztályba tartozó pont szomszédos a gráfban egyetlen él mentén.)

2. A 25 csúcsú G gráf egy 3 pontú, egy 4 pontú, egy 5 pontú, egy 6 pontú és egy 7 pontú körből készült úgy, hogy a 3 pontú kör minden csúcsát összekötöttük a másik négy kör minden csúcsával.

a) Van-e G-ben Hamilton-út? b) Van-e G-ben Hamilton-kör?

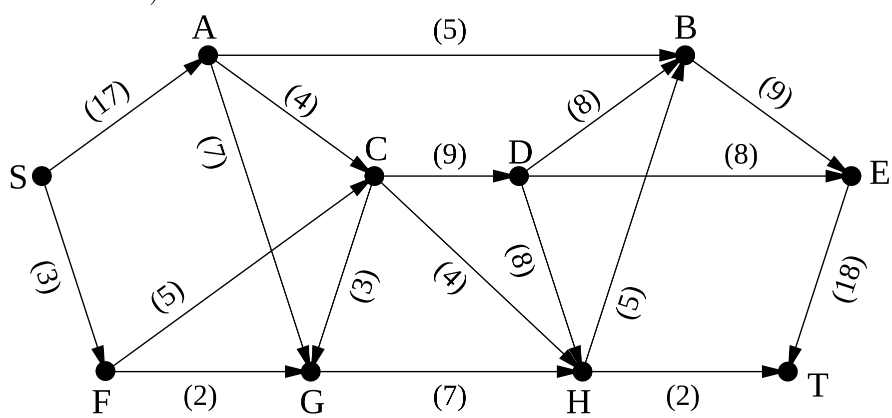
3. A 16 csúcsú G gráf egy 3 pontú, egy 5 pontú és egy 8 pontú körből készült úgy, hogy az 5 pontú kör minden csúcsát összekötöttük a másik két kör minden csúcsával. Igaz-e a G gráfra a $\chi(G) = \omega(G)$ összefüggés? ($\chi(G)$ a gráf kromatikus számát, $\omega(G)$ pedig a G-beli maximális klikk méretét jelöli.)

4. Egy 7 pontú kör minden élét helyettesítettük 2 vagy 3 párhuzamos éllel; hogy éppen 2-vel vagy 3-mal, azt minden élre véletlenszerűen döntöttük el. Előfordulhat-e, hogy a kapott G gráfra $\chi_e(G) = \Delta(G)$ teljesül (ahol $\chi_e(G)$ a gráf élkromatikus számát, $\Delta(G)$ pedig a G-beli maximális fokszámot jelöli)?



5. Adjunk meg a jobbra látható ábra gráfjában egy maximális méretű párosítást!

6. Határozzuk meg az alábbi hálózatban az $\{S, A, G\}$ csúcshalmaz és a maradék csúcsok között vezető élek alkotta vágás értékét és döntsük el, hogy ez a vágás minimális értékű-e (S és T között)!



A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — a MÁSODIK zárthelyi pótlására

2012. május 15.

1. A G gráfnak létezik olyan csúcsa, melyből bármely más csúcsba vezet három páronként éldiszjunkt út. Mutassuk meg, hogy G bármely két csúcsa között van három páronként éldiszjunkt út.

2. A 100×100-as A mátrixban a bal alsó sarokban, a jobb felső sarokban és a közvetlenül a főátló alatti és fölötti helyeken álló elemek 1-esek, a mátrix összes többi (9800 darab) eleme 0. (A-ban tehát az 1-es elemek az $a_{100,1}$, az $a_{1,100}$ és $a_{i,i+1}$ valamint $a_{i+1,i}$ minden $1 \le i \le 99$-re.) Hány darab 0 eleme van az A^{60} mátrixnak?

3. Legyen $a_1 = 7$, $i \ge 2$ esetén pedig $a_i = 7^{a_{i-1}}$. Milyen maradékot ad 20-szal osztva a_{2012}?

4. Egy n egész szám 67-szerese 43 maradékot ad 211-gyel osztva. Milyen maradékot adhat n 633-mal osztva?

5. Egy n egész szám 43 maradékot ad 211-gyel osztva. Milyen maradékot adhat n 53-mal osztva?

6. Értelmezzük a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán a $*$ műveletet a következőképpen:

$$a * b = a + b + 3ab$$

Félcsoportot, illetve csoportot alkot-e $\mathbb{R}$ a $*$ művelettel?

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód.

Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez szükséges minimális pontszám 24. A munkaidő 90 perc.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2012. március 12.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy 8 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 4. Mutassuk meg, hogy a gráfban van (pontosan) 4 hosszú kör.

* * * * *

Mivel a gráf egyszerű és minden pont foka legalább a csúcsszám fele, ezért Dirac tétele miatt a gráfban van Hamilton-kör. (2 pont)

Rögzítsünk egy C Hamilton-kört, ekkor a gráf további (C-hez nem tartozó) éleit tekinhetjük C átlóinak. Ezeket nevezzük „rövid”, „közepes”, vagy „hosszú” átlónak aszerint, hogy C mentén 1, 2, vagy 3 közbülső csúcsot ugranak át (C rövidebbik ívén vizsgálva).

Ha az átlók közt van közepes, akkor a két végpontja között futó (rövidebbik) ív C mentén az átlóval együtt 4 hosszú kört alkot. (2 pont)

A továbbiakban feltehetjük, hogy nincs közepes átló. Ha van viszont egy $\{u, v\}$ hosszú átló, akkor u-ból legalább egy további élnek kell indulnia ($\{u, v\}$-n és C élein kívül), ami tehát csak egy $\{u, w\}$ rövid átló lehet. Most C-nek a v és w közötti (egyetlen) további csúcsát z-vel jelölve megint 4 hosszú kört kapunk az u, v, z és w csúcsokat (ebben a sorrendben) bejárva. (3 pont)

A visszamaradó egyetlen eset az, amikor minden átló rövid. Ekkor viszont minden csúcshoz pontosan két rövid átló illeszkedik, így bármely csúcsból indulva és pontosan 4 rövid átlót bejárva megint 4 hosszú kört kapunk. (3 pont)

2. Egy képzeletbeli nyelv hangkészlete 10 magánhangzóból és 21 mássalhangzóból áll. Ezen a nyelven nincsenek kettős hangzók és tilos a mássalhangzótorlódás; vagyis sem két azonos hang, sem két különböző mássalhangzó soha nem állhat egymás mellett. (Viszont minden más lehetséges, vagyis bármely két különböző hang állhat egymás után, ha legalább az egyikük magánhangzó.) Legföljebb milyen hosszú megengedett hangsor készíthető ezen a nyelven, ha a bármely hang többször is felhasználható, de további feltétel, hogy bármely két különböző hang legföljebb egyszer állhat egymás mellett a hangsorban?

* * * * *

A G gráf csúcshalmaza álljon a 31 hangból és két különböző hang akkor legyen szomszédos G-ben (egyetlen él mentén), ha legalább az egyikük magánhangzó. (2 pont)
Ekkor egy, a feladat szövegének megfelelő hangsor nem más, mint egy olyan G-beli élsorozat, amelyben minden él legfeljebb egyszer szerepelhet. (2 pont)
G-ben a magánhangzók foka 30 (mert minden más csúccsal szomszédosak), a mássalhangzóké 10 (mert a 10 magánhangzóval szomszédosak). (1 pont)
G nyilván összefüggő, hiszen csak a mássalhangzó párok nem szomszédosak, de köztük is bármely magánhangzón át vezet 2 hosszú út. (1 pont)
G összefüggő és minden pont foka páros, ezért van benne Euler-kör. (2 pont)
Mivel egy Euler-kör G minden élét tartalmazza, ezért nyilván ez felel meg a leghosszabb megengedett hangsornak. (1 pont)
Ennek hossza pedig G éleinek száma, amely (a fokszámösszeg fele, vagyis) $\frac{10\cdot 30+21\cdot 10}{2} = 255$.(1 pont)

3. Legyenek a G gráf csúcsai a (8×8-as) sakktábla mezői és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha egy királynak legalább két lépésre van szüksége ahhoz, hogy az egyikről a másikra jusson. Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t! (A sakkban a király egy lépésben bármely mezőről egy azzal akár közös él mentén, akár közös csúcs mentén szomszédos mezőre léphet.)

* * * * *

Hivatkozzunk a mezőkre a sakkban szokásos módon: a sorokat 1-től 8-ig számozva, az oszlopokat pedig A-tól H-ig betűzve.
Az A, C, E és G oszlopok és az 1., 3., 5. és 7. sorok kereszteződéseiben álló 16 mező klikket alkot G-ben (hiszen közülük bármelyikről indulva és a királlyal egyet lépve nem érkezhetünk egy másikra). (4 pont)
16 színnel viszont G csúcsai könnyen megszínezhetők. Ugyanis „parkettázzuk ki” a sakktáblát 16 darab 2×2-es négyzettel és adjuk mindig a közös parketta alá kerülő 4 mezőnek ugyanazt a színt. A kapott színezés nyilván jó, hiszen egy 2×2-es négyzet bármelyik mezőjéről bármely másik a király legföljebb egy lépésével elérhető. (4 pont)
Mivel G-ben van 16 csúcsú klikk, ezért $\chi(G) \geq 16$, (1 pont)
másrészt mivel G csúcsai 16 színnel színezhetők, ezért $\chi(G) = 16$. (1 pont)

4. A 10 csúcsú G gráf két (közös csúcs nélküli) 5 pontú útból készült úgy, hogy az egyik út minden csúcsát összekötöttük a másik út minden csúcsával. Határozzuk meg $\chi_e(G)$-t, G élkromatikus számát!

* * * * *

Bontsuk G éleit kétfelé: E_1 álljon az eredetileg a két 5 pontú úthoz tartozó 8 élből, E_2 pedig a két út összekötésekor létrejött élekből.
E_1 nyilván megszínezhető 2 színnel: mindkét úton felváltva használjuk a két színt. (2 pont)
E_2 pedig (a G csúcsaival) páros gráfot alkot (a két pontosztály a két út csúcshalmaza), így Kőnig tétele szerint megszínezhető 5 színnel, hiszen a páros gráfban minden pont foka 5. (2 pont)
E_1 és E_2 színezését egyesítve pedig G egy helyes élszínezését kapjuk 7 színnel. (3 pont)
G-ben a pontok foka 6 vagy 7, hiszen minden pont 1 vagy 2 E_1-beli és 5 E_2-beli élre illeszkedik.
Így G-ben a maximális fokszám 7, (1 pont)
ezért $\chi_e(G) \geq 7$. (1 pont)
Mivel azonban G éleit 7 színnel megszíneztük, ezért $\chi_e(G) = 7$. (1 pont)
Természetesen teljes értékű megoldás az is a 7-színezhetőségre, ha a Kőnig-tételre hivatkozás nélkül adja meg valaki G egy (helyes) élszínezését 7 színnel.

5. A $G(A,B;E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_8\}$ és $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_8\}$. Minden $1\le i,j\le 8$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy minimális lefogó ponthalmazt!

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&0&1&0&1&1\\ 1&1&0&1&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Az $\{a_1,a_3,a_5,a_6,b_2,b_5,b_8\}$ lefogó ponthalmaz G-ben (ez a feladatban megadott mátrixból könnyen ellenőrizhető). (5 pont)

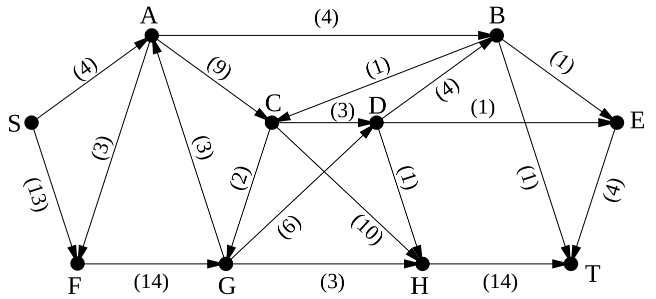
G-ben könnyű mutatni 7 élű párosítást: például az $\{a_1,b_3\}$, $\{a_2,b_2\}$, $\{a_3,b_1\}$, $\{a_4,b_5\}$, $\{a_5,b_7\}$, $\{a_6,b_4\}$ és az $\{a_7,b_8\}$ élek. (3 pont)

Így $\nu(G)\ge 7$, amiből a $\nu(G)\le\tau(G)$ összefüggés szerint 7-nél kisebb lefogó ponthalmaz nincs G-ben. (1 pont)

Így a fent megadott lefogó ponthalmaz minimális. (1 pont)

Megjegyezzük, hogy a fenti nem az egyetlen 7 elemű lefogó ponthalmaz: $\{a_1,a_3,a_6,b_2,b_5,b_7,b_8\}$ is ilyen. A minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges ennek a lépéseit dokumentálni. (A dokumentálás ugyanakkor rendkívül hasznosnak bizonyulhat egy esetleges hiba esetén, hiszen lehetővé teszi a javító számára, hogy eldöntse: elírásról, számolási hibáról vagy elvi hibáról van szó.)

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be) és egy minimális vágást!



* * * * *

Az alábbi ábrán látható folyam értéke 15. (A 0 folyamértékeket nem jelöltük.) (3 pont)

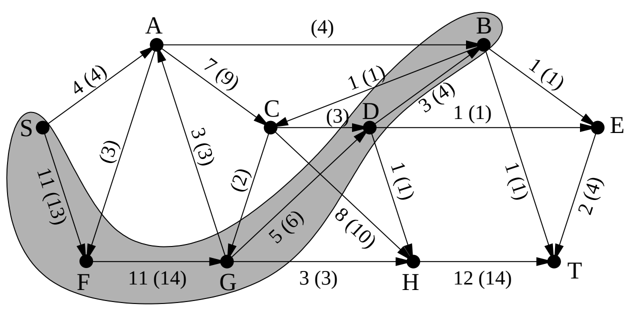
Az ugyancsak az ábrán látható vágás (tehát az $\{S,B,D,F,G\}$ halmaz és a maradék csúcsok között futó élek halmaza) értéke (tehát az $\{S,B,D,F,G\}$ halmazból a maradék csúcsok halmazába menő élek összkapacitása) szintén 15. (4 pont)

Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás értéke, (1 pont)

ezért a 15 értékű vágás bizonyítja, hogy a 15 értékű folyam maximális (1 pont)

és a 15 értékű folyam bizonyítja, hogy a 15 értékű vágás minimális. (1 pont)

Az utolsó 3 pont tehát annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam, illetve vágás maximális, illetve minimális. (Például az „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális, a vágás minimális" mondat – további kiegészítés híján – *nem* tekintendő (érdemi) indoklásnak; aki csak ennyit ír, az utolsó 3 pontból 1-et kapjon.) A folyam maximalitása mellett lehet úgy is érvelni, hogy a 15 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út.



Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2012. április 19.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy öt csúcsú egyszerű gráf szomszédossági mátrixának harmadik hatványában a főátló elemeinek szorzata 64. Mutassuk meg, hogy a gráf kétszeresen élösszefüggő.

* * * * *

A definíció szerint egy gráf szomszédossági mátrixának harmadik hatványában a főátló i. eleme az i. csúcson átmenő három hosszú zárt élsorozatok számával egyenlő. (1 pont)
Mivel a gráf (nevezzük G-nek) egyszerű (valójában elég a hurokélmentességet használni), a három hosszú zárt élsorozatok épp a három hosszú körök. (2 pont)
A feltétel miatt a főátlóban nem szerepel a 0, ezért minden csúcson átmegy legalább egy három hosszú kör. (2 pont)
Tegyük fel indirekten, hogy G nem kétszeresen élösszefüggő, ekkor lesz olyan éle, amit elhagyva a kapott G' gráf nem lesz összefüggő. (1 pont)
G' legkisebb komponense (nevezzük K-nak) ekkor legfeljebb két pontból állhat, hiszen G'-nek legalább két komponense van és öt csúcsa. (1 pont)
K nem állhat egy csúcsból, mert G-ben minden csúcson megy át kör, azaz minden csúcs foka legalább kettő. (1 pont)
K azonban nem állhat két csúcsból sem, mert a bármelyikükön átmenő három hosszú körnek két éle menne ki K-ból G-ben, ami lehetetlen, ezzel az állítást beláttuk. (2 pont)
Érdemes megjegyezni, hogy a feltételnek megfelelő gráf csakugyan létezik, például ilyen lesz az a gráf, ami két olyan háromszögből áll, melyeknek egy közös csúcsa van. (Sőt, azt sem túl nehéz megmutatni, hogy valójában ez az egyetlen, a feltételeknek megfelelő gráf.)

2. A 15 pontú G gráf egy 4 pontú, egy 5 pontú és egy 6 pontú körből készült úgy, hogy az 5 pontú kör minden csúcsát összekötöttük (egyetlen éllel) a másik két kör minden csúcsával. Legyen s a 4 pontú kör egyik csúcsa, t pedig a 6 pontú kör egyik csúcsa.

a) Maximálisan hány páronként csúcsdiszjunkt út adható meg s és t között G-ben?

b) Maximálisan hány páronként éldiszjunkt út adható meg s és t között G-ben?

* * * * *

a) Jelölje $v_1, v_2, \ldots, v_5$ az 5 pontú kör csúcsait. Ekkor az (s, v_i, t) utak (a szomszédos csúcsok közti éleket beleértve) öt darab, páronként csúcsdiszjunkt utat alkotnak s és t között. (2 pont)
Ennél több ilyen út viszont (Menger irányítatlan gráfokra és s és t közötti csúcsdiszjunkt utakra vonatkozó tétele szerint) nem létezhet, mert a $v_1, v_2, \ldots, v_5$ csúcsok lefogják az s és t közötti összes utat (hiszen ezeket G-ből elhagyva már nincs s-ből t-be út). Vagyis a válasz: 5. (3 pont)

b) Jelölje s két szomszédját a 4 pontú körön s_1 és s_2 és t két szomszédját a 6 pontú körön jelölje t_1 és t_2. Az a) feladatban megadott öt utat kiegészíthetjük két továbbival: (s, s_1, v_1, t_1, t) és (s, s_2, v_1, t_2, t). Az így kapott 7 darab út páronként éldiszjunkt. (3 pont)
Ennél több ilyen út viszont (Menger irányítatlan gráfokra és s és t közötti éldiszjunkt utakra vonatkozó tétele szerint) nem létezhet, mert például az s-re illeszkedő 7 darab él nyilván lefogja az s és t közötti összes utat (hiszen ezek elhagyása után s izolált csúcs lesz, t nem érhető el belőle). Így a válasz: 7. (2 pont)

3. Milyen maradékot adhat egy egész szám 153-mal osztva, ha a 31-szerese 10 maradékot ad 153-mal osztva?

* * * * *

A feladat a $31n \equiv 10 \pmod{153}$ lineáris kongruencia. (1 pont)
5-tel szorozva: $155n \equiv 50 \pmod{153}$, vagyis $2n \equiv 50 \pmod{153}$. (3 pont)
2-vel osztva: $n \equiv 25 \pmod{153}$, (2 pont)
ahol $(2, 153) = 1$ miatt az osztás a kongruencia modulusát nem változtatta meg. (2 pont)
Mivel $(5, 153) = 1$ miatt az először végzett 5-tel való szorzás is ekvivalens lépés, ezért a megoldás $n \equiv 25 \pmod{153}$, vagyis a keresett maradék csak 25 lehet. (2 pont)
Ha valaki csak azt ellenőrzi, hogy $(31, 153) = 1|1$, így a kongruenciának van megoldása, de a megoldást kiszámolni nem tudja, az összesen 2 pontot kapjon. A megtett lépések ekvivalens voltára való hivatkozás helyett ellenőrzéssel is meg lehet győződni a kapott megoldás helyességéről (vagy lehet hivatkozni arra is, hogy $(31, 153) = 1$ miatt egyetlen helyes megoldás létezik $\pmod{153}$, így a kapott megoldás helyes). Számolási hibákért 1-1 pont vonandó le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb.

4. Hány olyan 2012-nél kisebb pozitív egész szám van, amely 19-cel osztva 10 maradékot ad és 37-tel osztva 15 maradékot ad?

* * * * *

A feladat az $n \equiv 10 \pmod{19}$, $n \equiv 15 \pmod{37}$ kongruenciarendszer 2012-nél kisebb pozitív megoldásai számának meghatározása. (1 pont)
Az első kongruencia szerint $n = 19k + 10$ alakú valamilyen k egészre. (1 pont)
Ezt a második kongruenciába helyettesítve: $19k + 10 \equiv 15 \pmod{37}$. (2 pont)
10-et mindkét oldalból levonva: $19k \equiv 5 \pmod{37}$. (1 pont)
2-vel szorozva: $38k \equiv 10 \pmod{37}$, vagyis $k \equiv 10 \pmod{37}$. (2 pont)
Így $k = 37\ell + 10$ alakú valamely ℓ egészre. Ezt a fentibe helyettesítve:

$$n = 19k + 10 = 19(37\ell + 10) + 10 = 703\ell + 200.$$

A kongruenciarendszer megoldásai tehát az ilyen alakú (vagyis az $n \equiv 200 \pmod{703}$ kongurenciának eleget tevő) n egészek. (2 pont)
Látható, hogy az $\ell = 0, 1, 2$ esetekben kapunk 2012-nél kisebb pozitív megoldásokat (ezek 200, 903 és 1606), így tehát három ilyen szám van. (1 pont)

5. Legyen $p > 2$ olyan prímszám, amelyre $2p+1$ is prím. Bizonyítsuk be, hogy ekkor fennáll az alábbi kongruencia:

$$(p-1)^{(p-2)^{p-1}} \equiv p-1 \pmod{2p+1}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Mivel $2p+1$ prím, ezért $(p-1, 2p+1) = 1$, (1 pont)
és $\varphi(2p+1) = 2p$. (1 pont)
Így az Euler-Fermat tételt alkalmazva: $(p-1)^{2p} \equiv 1 \pmod{2p+1}$. (1 pont)
Ezt tetszőleges $k \geq 0$ egészre k-adik hatványra emelve, majd $(p-1)$-gyel szorozva: $(p-1)^{k \cdot 2p+1} \equiv p-1 \pmod{2p+1}$. (2 pont)
Ezért a feladat megoldásához elegendő lesz megmutatni, hogy $(p-2)^{p-1} = k \cdot 2p + 1$ teljesül valamilyen alkalmas k-ra, vagyis hogy $(p-2)^{p-1} \equiv 1 \pmod{2p}$. (2 pont)
Mivel p prím, ezért $2p$ valódi osztói csak 2 és p, ezek pedig $(p-2)$-nek nyilván nem osztói. Így $(p-2, 2p) = 1$. (1 pont)
A φ kiszámítására tanult képletből $\varphi(2p) = (2-1)(p-1) = p-1$ következik, (1 pont)
így az Euler-Fermat tételt $(p-2)$-re és $2p$-re alkalmazva éppen a kívánt $(p-2)^{p-1} \equiv 1 \pmod{2p}$ állítást kapjuk, ezzel a feladat állítását bizonyítva. (1 pont)

6. Legyen $H = \{(a,b,c) : a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0\}$, vagyis H a térnek azokból a vektoraiból áll, amelyeknek az első két koordinátája nem 0. Értelmezzük H-n a $*$ műveletet a következőképpen:

$$(a,b,c) * (d,e,f) = (ad, be, af + ce)$$

(Így tehát például $(1,2,3)*(4,5,6) = (4,10,21)$.) Döntsük el, hogy H csoportot alkot-e $*$-ra nézve!

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az asszociativitás ellenőrzéséhez vegyünk három H-beli vektort: (a,b,c), (d,e,f), (g,h,i).
Ekkor

$$\Big((a,b,c)*(d,e,f)\Big)*(g,h,i) = (ad, be, af+ce)*(g,h,i) =$$
$$= (adg, beh, adi + (af+ce)h) = (adg, beh, adi + afh + ceh) \quad \text{(1 pont)}$$

és

$$(a,b,c)*\Big((d,e,f)*(g,h,i)\Big) = (a,b,c)*(dg, eh, di+fh) =$$
$$= (adg, beh, a(di+fh) + ceh) = (adg, beh, adi + afh + ceh), \quad \text{(1 pont)}$$

ami az asszociativitást igazolja. (1 pont)
Van egységelem a $*$-ra nézve, mégpedig az $(1,1,0)$ (amely $1 \neq 0$ miatt H-beli), (1 pont)
ugyanis $(a,b,c)*(1,1,0) = (a \cdot 1, b \cdot 1, a \cdot 0 + c \cdot 1) = (a,b,c)$ (1 pont)
és $(1,1,0)*(a,b,c) = (1 \cdot a, 1 \cdot b, 1 \cdot c + 0 \cdot b) = (a,b,c)$. (1 pont)
A tetszőleges (a,b,c) elemnek $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{-c}{ab})$ inverze lesz, mert $\frac{1}{a} \neq 0 \neq \frac{1}{b}$ miatt $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{-c}{ab}) \in H$(1 pont)
és $(a,b,c)*(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{-c}{ab}) = (a \cdot \frac{1}{a}, b \cdot \frac{1}{b}, a \cdot \frac{-c}{ab} + c\frac{1}{b}) = (1,1,0)$ (1 pont)
és $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{-c}{ab})*(a,b,c) = (\frac{1}{a} \cdot a, \frac{1}{b} \cdot b, \frac{1}{a} \cdot c + \frac{-c}{ab} \cdot b) = (1,1,0)$. (1 pont)
Mivel a definíció minden feltétele teljesül, ezért H $*$-ra nézve csoport. (1 pont)
Az utolsó 1 pont annak jár, aki a korábbi számolásaiból helyes következtetést von le (akkor is, ha egy hibás számolásból arra következtet, hogy $(H,*)$ nem csoport). Megjegyezzük, hogy a feladatbeli H zárt $*$-ra, hiszen $(a,b,c) \in H$ és $(d,e,f) \in H$ esetén $a \neq 0 \neq b$ és $d \neq 0 \neq e$, így $ad \neq 0$ és $be \neq 0$, vagyis $(ad, be, af+ce) \in H$. Azonban H zártságát a feladat szövege is állítja, amikor $*$-ot műveletnek nevezi. Ezért ennek ellenőrzéséért nem jár külön pont.

Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az **ELSŐ** zárthelyi pótlására

Pontozási útmutató

2012. május 7.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. A 10 csúcsú G gráf két (közös csúcs nélküli) 5 pontú útból készült úgy, hogy az egyik út minden csúcsát összekötöttük a másik út minden csúcsával. Legföljebb hány élből állhat G-ben egy olyan élsorozat, amelyben G minden éle legföljebb egyszer szerepelhet?

* * * * *

A feladat nem mást kíván, mint a G egy lehető legtöbb élből álló, Euler-úttal bíró részgráfjának a megkeresését. Más szóval a kérdés az, hogy minimálisan hány élet kell elhagyni G-ből, hogy a maradék gráfban már legyen Euler-út. (2 pont)

G-ben 4 darab 6 fokú és 6 darab 7 fokú pont van (előbbiek a G-t alkotó két út végpontjai, utóbbiak az utak belső pontjai). (1 pont)

Mivel Euler-úttal bíró gráfban csak 2 páratlan fokú pont lehet és egyetlen él elhagyása csak két pont fokszámát változtathatja meg, ezért legalább 2 él elhagyására szükség van ahhoz, hogy a 6 helyett csak 2 páratlan fokú pont legyen. (2 pont)

Ez könnyen meg is valósítható: például ha v_2 és v_3 jelöli az egyik út (valamelyik vége felől számított) második és harmadik csúcsát és w_2 és w_3 a másik út két megfelelő csúcsát, akkor a $\{v_2, w_2\}$ és a $\{v_3, w_3\}$ élek elhagyása után G-ben már csak két páratlan fokú pont lesz. (1 pont)

Mivel a maradék gráf nyilván összefüggő is, (1 pont)

ezért (a tanult tétel szerint) van benne Euler-út. (1 pont)

Mivel G-nek 33 éle van és ebből minimálisan 2-t kell elhagyni ahhoz, hogy Euler-úttal bíró gráfot kapjunk, ezért a leghosszabb, élismétlés nélküli séta G-ben 31 élből áll. (2 pont)

2. A 30 csúcsú G gráf egy 4 pontú, egy 5 pontú, egy 6 pontú, egy 7 pontú és egy 8 pontú körből készült úgy, hogy a 4 pontú kör minden csúcsát összekötöttük a másik négy kör minden csúcsával.

a) Van-e G-ben Hamilton-út? b) Van-e G-ben Hamilton-kör?

* * * * *

G-ben könnyen mutatható Hamilton-kör, például a következőképpen. Jelölje v_1, v_2, v_3, v_4 a 4 pontú kör csúcsait, a G-t alkotó 5, 6, 7, illetve 8 pontú kört pedig C_5, C_6, C_7, illetve C_8. A Hamilton-kört például v_1-ből indítva először „ugorjunk át" C_5 valamelyik csúcsába, majd a kör élei mentén sorban járjuk be C_5 összes csúcsát, végül az utolsóról lépjünk tovább v_2-re. Innen az előzőhöz hasonlóan C_6 egyik csúcsára ugrunk és bejárjuk C_6-ot; ezután v_3-on keresztül C_7, majd v_4-en keresztül C_8 összes csúcsát járjuk be. Végül C_8 legutolsónak érintett csúcsáról visszaléphetünk v_1-be. (8 pont)
Mivel G-ben van Hamilton-kör, ezért nyilván van Hamilton-út is. (2 pont)
(Ha valaki csak Hamilton-utat talál G-ben, de kört nem, az a fentiek szerint 2 pontot kaphat.)

3. Legyenek a G gráf csúcsai a (8×8-as) sakktábla mezői és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő mezők vagy él mentén szomszédosak a sakktáblán, vagy legalább az egyikük a sakktábla szélén helyezkedik el. Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t! (A feladatbeli „vagy" nem kizáró, vagyis két csúcs akkor is szomszédos, ha mindkét feltétel teljesül. A sakktábla széle alatt a legfelső és a legalsó sor, valamint a balszélső és a jobbszélső oszlop mezőit értjük.)

* * * * *

G-ben lehet mutatni 30 pontú klikket: a széleken elhelyezkedő 28 mezőhöz vegyünk hozzá két további (tehát nem a tábla szélén található), egymással él mentén szomszédos mezőt. (4 pont)
30 színnel viszont G csúcsai könnyen megszínezhetők: a széleken lévő 28 mezőhöz használjunk el 28 különböző színt, a többi (6×6-os „sakktáblát" alkotó) mezőt pedig színezzük 2 további színnel, mégpedig a sakktáblán megszokott színezés szerint. (4 pont)
Mivel G-ben van 30 csúcsú klikk, ezért $\chi(G) \geq 30$, (1 pont)
másrészt mivel G csúcsai 30 színnel színezhetők, ezért $\chi(G) = 30$. (1 pont)

4. Egy 2012 pontú kör minden élét helyettesítettük 3 vagy 4 párhuzamos éllel; hogy éppen 3-mal vagy 4-gyel, azt minden élre véletlenszerűen döntöttük el. Mutassuk meg, hogy a kapott G gráfra $\chi_e(G) = \Delta(G)$ teljesül (ahol $\chi_e(G)$ a gráf élkromatikus számát, $\Delta(G)$ pedig a G-beli maximális fokszámot jelöli).

* * * * *

Mivel $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$ minden gráfra igaz, ezért a $\chi_e(G) = \Delta(G)$ állítás bizonyításához elegendő lesz megmutatni, hogy G élei színezhetők $\Delta(G)$ színnel. (2 pont)
$\Delta(G)$ értéke háromféle lehet: 6, 7, vagy 8.
Ha $\Delta(G) = 6$, akkor a 2012 pontú kör minden élét pontosan 3 éllel helyettesítettük, vagyis ekkor G élhalmaza felvágható 3 páronként diszjunkt körre. Ha most mindhárom kör éleit két-két színnel színezzük (mégpedig úgy, hogy a körök mentén a két színt váltogatjuk), akkor ezzel valóban G egy helyes élszínezését kapjuk 6 színnel. (2 pont)
Ha $\Delta(G) = 7$, akkor G-t felfoghatjuk úgy, hogy az a $\Delta(G) = 6$ esetben leírt gráfból keletkezett néhány további él hozzávételével. Azonban ezek közül az extra élek közül semelyik kettő nem szomszédos (mert ha két ilyen él illeszkedne a közös v csúcsra, akkor $d(v) = 8$ volna). Így az extra éleket megszínezhetjük egyetlen további színnel, amivel valóban G egy helyes élszínezését kapjuk 7 színnel. (3 pont)
Végül, ha $\Delta(G) = 8$, akkor G részgráfja annak a H gráfnak, amit akkor kaptunk volna, ha a 2012 pontú kör minden élét 4 éllel helyettesítjük. Mivel még H élei is megszínezhetők 8 színnel (a $\Delta(G) = 6$ esettel analóg módon, csak 3 helyett 4 körre bontva az élhalmazt), ezért ugyanez igaz G-re is. (3 pont)

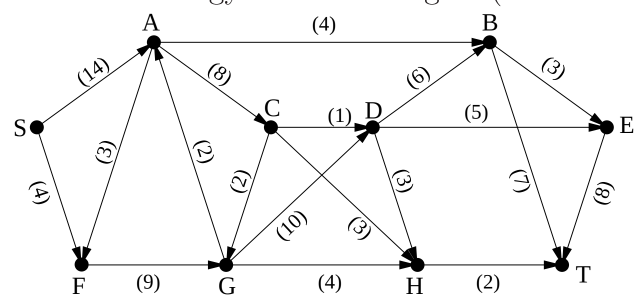
5. A $G(A,B;E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Minden $1 \le i \le 9$ és $1 \le j \le 8$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális méretű párosítást!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

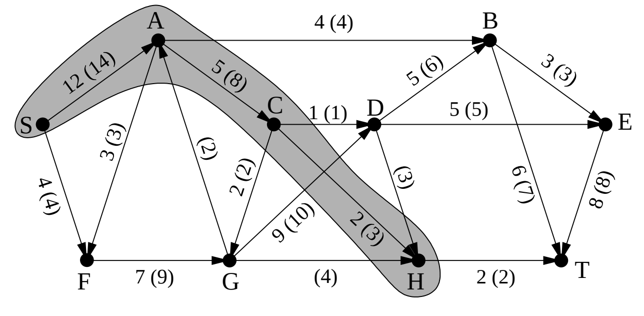
Például az $\{a_1, b_4\}$, $\{a_2, b_3\}$, $\{a_3, b_2\}$, $\{a_4, b_1\}$, $\{a_5, b_6\}$, $\{a_6, b_7\}$ és az $\{a_8, b_5\}$ élek 7 élű párosítást alkotnak G-ben. (3 pont)
Mivel az $\{a_1, a_3, a_5, a_8, b_1, b_3, b_7\}$ lefogó ponthalmaz G-ben (ez a feladatban megadott mátrixból könnyen ellenőrizhető), (5 pont)
ezért $\tau(G) \le 7$, így a $\nu(G) \le \tau(G)$ összefüggés szerint 7-nél nagyobb párosítás nem létezhet G-ben. Így a fent megadott párosítás maximális. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy G-ben sok, a fent megadottól különböző 7 élű párosítás is van és 7 elemű lefogó ponthalmazból is van másik: $\{a_3, a_5, a_8, b_1, b_3, b_4, b_7\}$. A megadott 7 élű párosítás maximalitása mellett úgy is lehet érvelni, hogy mivel az $X = \{b_2, b_5, b_6, b_8\}$ csúcshalmaz megsérti a Hall-feltételt (mert $N(X) = \{a_3, a_5, a_8\}$) ezért G-ben nincs a B-t lefedő párosítás, vagyis nincs 7-nél nagyobb párosítás. (Hasonlóan, az $X = \{b_2, b_4, b_5, b_6, b_8\}$ is megsérti a Hall-feltételt.) De akár úgy is lehet indokolni, hogy G-ben nincs 8 élű párosítás, hogy meggyőződünk arról, hogy a megadott 7 élű párosításra nézve nem létezik javító út.

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy minimális vágást (S és T között)!



* * * * *

Az alábbi ábrán jelölt vágás (tehát $\{S, A, C, H\}$ és a maradék csúcsok között futó élek halmaza) értéke (tehát az S, A, C, H csúcsokból a többibe futó élek összkapacitása) 16. (4 pont)
Az ugyancsak az ábrán látható folyam értéke szintén 16. (3 pont)
Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás értéke, (1 pont)
ezért a 16 értékű folyam bizonyítja, hogy a megadott 16 értékű vágás minimális. (2 pont)
Az utolsó 3 pont tehát annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott vágás minimális. (Például az „a Ford-Fulkerson tétel miatt a vágás minimális” mondat – további kiegészítés híján – *nem* tekintendő (érdemi) indoklásnak; aki csak ennyit ír, az utolsó 3 pontból 1-et kapjon.)



Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az **MÁSODIK** zárthelyi pótlására

Pontozási útmutató

2012. május 7.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. A 100 csúcsú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább 2. A G gráffal gondolatban a következő kísérletet végezzük: az összes lehetséges módon kiválasztunk G csúcsai közül két különbözőt és a kiválasztott csúcsokat elhagyjuk G-ből. Azt kapjuk, hogy a kísérletek közül 98 esetben a maradék gráf nem összefüggő, de az összes többi esetben igen. Határozzuk meg a legnagyobb k számot, amelyre G k-szorosan összefüggő.

* * * * *

Mivel létezik két olyan csúcs, melyet elhagyva a gráf már nem összefüggő, G nem háromszorosan összefüggő, azaz k legfeljebb 2 lehet. (2 pont)

Megmutatjuk, hogy $k = 2$. Tegyük fel indirekten, hogy ez nem így van, azaz létezik olyan a csúcs, melyet elhagyva a gráf nem összefüggő. (Mivel a gráfnak kettőnél több csúcsa van, tényleg léteznie kell ilyen a-nak, de ezen megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot.) (1 pont)

Legyenek a gráf többi csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{99}$. Ha a gráf a-t elhagyva szétesik, akkor mindegyik komponensében legalább két pont lesz, ellenkező esetben lenne olyan csúcs, ami csak a-val volt összekötve, ami ellentmond a feltételeknek (minden fok legalább 2, G egyszerű). (2 pont)

Így $G - a$ bármely csúcsát elhagyva olyan gráfot kapunk, ami nem összefüggő, (1 pont)

azaz G-ből az (a, v_i) (minden $1 \leq i \leq 99$ esetén) párok bármelyikét elhagyva nem összefüggő gráfot kapunk, (3 pont)

ami ellentmondás, hiszen csak 98 ilyen pár létezik a gráfban. (1 pont)

Érdemes megjegyezni, hogy a feltételnek megfelelő gráf csakugyan létezik, például ilyen lesz az a gráf, amit egy 99 csúcsú útból úgy kapunk, hogy az egyik nem szélső csúcs kivételével minden csúcsot összekötünk egy új csúccsal.

2. Egy G egyszerű gráf minden csúcsában lakik egy bogárka. Egy adott pillanatban minden bogárka felkerekedik és átköltözik a gráf egy, a jelenlegi lakhelyével szomszédos csúcsába. A bogárkák ezt úgy szeretnék megtenni, hogy végül ismét minden csúcsban egyetlen bogárka lakjon. Bizonyítsd be, hogy ha G szomszédossági mátrixának a determinánsa nem nulla, akkor a bogárkák terve megvalósítható!

* * * * *

Címkézzük a G csúcsait az $1, 2, \ldots, n$ számokkal és jelölje G szomszédossági mátrixát A (amelynek az i-edik sora és oszlopa az i-vel címkézett csúcsnak felel meg minden $1 \leq i \leq n$ esetén).
A $\det A \neq 0$ feltételből a determináns definíciója szerint következik, hogy létezik az $1, 2, \ldots, n$ számoknak egy olyan $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ permutációja, amelyre az A mátrix i-edik sorának és π_i-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Ellenkező esetben ugyanis a $\det A$ definíció szerinti kiszámításakor keletkező mind az $n!$ darab tag 0 volna, így $\det A$ is 0 lenne. (Mivel G egyszerű, ezért A minden eleme 0 vagy 1.) (3 pont)
A π permutációt felhasználva a bogárkák megvalósíthatják a tervüket: minden $1 \leq i \leq n$ esetén költözzön az i csúcsban lakó bogárka a π_i csúcsba. (4 pont)
Valóban: minden bogárka szomszédos csúcsba költözik (hiszen a mátrix megfelelő elemei 1-esek) és a költözések után is minden csúcsban egyetlen bogárka lakik (hiszen a $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ értékek között minden 1 és n közötti szám pontosan egyszer fordul elő, mert π permutáció). (3 pont)
Megjegyezzük, hogy a bogárkák tervének megvalósíthatósága megfogalmazható úgy is, hogy G-ben megadható néhány él és néhány kör úgy, hogy G minden csúcsa pontosan egyre illeszkedik a megadott élek és körök közül. (Valóban: minden bogárka vagy „lakást cserél" valamelyik szomszédjával, vagy részt vesz egy legalább három bogárka által alkotott körbeköltözési láncban.) Bár ez a felismerés a feladat megoldásához közvetlenül nem visz közelebb, de tekinthető a helyes megoldás irányába tett érdemi lépésnek, így a leírásáért legföljebb 3 pont adható.

3. Milyen maradékot ad 5^{73}-nal osztva $16^{5^{73}}$?

* * * * *

$\varphi(5^{73}) = 5^{73} - 5^{72}$ (a tanult képlet szerint). (1 pont)
Mivel 2 és 5^{73} relatív prímek (hiszen a prímtényezős felbontásukban nincs közös prím), (1 pont)
ezért alkalmazható rájuk az Euler-Fermat tétel: $2^{\varphi(5^{73})} = 2^{5^{73} - 5^{72}} \equiv 1 \pmod{5^{73}}$. (2 pont)
Ebből $5^{73} - 5^{72} = 4 \cdot 5^{72}$ figyelembevételével: $2^{4 \cdot 5^{72}} \equiv 1 \pmod{5^{73}}$, (2 pont)
amiből $16 = 2^4$ miatt $16^{5^{72}} \equiv 1 \pmod{5^{73}}$. (1 pont)
Ötödik hatványra emelve: $16^{5 \cdot 5^{72}} = 16^{5^{73}} \equiv 1 \pmod{5^{73}}$ (vagyis a keresett maradék: 1).(3 pont)
Aki nem jön rá, hogy az Euler-Fermat tételt 2-re (és 5^{73}-ra) érdemes alkalmazni, de 16-ra (és 5^{73}-ra) alkalmazza (helyesen), az a fenti pontozásbeli első 4 pontot megkaphatja.

4. Egy egész szám 199-cel vett osztási maradéka 1-gyel nagyobb, mint a szám 43-szorosának a 199-cel vett osztási maradéka. Milyen maradékot adhat ez a szám 199-cel osztva?

* * * * *

A feladat az $n - 1 \equiv 43n \pmod{199}$ kongruencia megoldása. (1 pont)
Rendezve: $42n \equiv -1 \pmod{199}$, (1 pont)
5-tel szorozva: $210n \equiv -5 \pmod{199}$, vagyis $11n \equiv -5 \pmod{199}$. (2 pont)
18-cal szorozva: $198n \equiv -90 \pmod{199}$, (3 pont)
vagyis $-n \equiv -90 \pmod{199}$, azaz $n \equiv 90 \pmod{199}$. (1 pont)
Mivel $(5, 199) = 1$ és $(18, 199) = 1$, a két szorzás ekvivalens lépés, ezért a megoldás $n \equiv 90 \pmod{199}$, vagyis a keresett maradék csak 90 lehet. (2 pont)
Ha valaki csak azt ellenőrzi, hogy $(42, 199) = 1|1$, így a kongruenciának van megoldása, de a megoldást kiszámolni nem tudja, az összesen 2 pontot kapjon. A megtett lépések ekvivalens voltára való hivatkozás helyett ellenőrzéssel is meg lehet győződni a kapott megoldás helyességéről vagy lehet hivatkozni arra is, hogy $(42, 199) = 1$ miatt egyetlen helyes megoldás létezik $\pmod{199}$, így a kapott megoldás helyes. Számolási hibákért 1-1 pontot vonjunk le, de a maradék pontszám csak akkor jár, ha a hiba miatt a feladat nem lett lényegesen könnyebb.

5. Hány olyan n egész szám van 1 és 1000 között, amelyhez található olyan m egész szám, hogy a $37n + 218m = 10$ egyenlet fennálljon?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Egy n egészhez akkor és csak akkor létezik a $37n + 218m = 10$ egyenletet kielégítő m egész, ha $10 - 37n$ osztható 218-cal, vagyis ha $37n \equiv 10 \pmod{218}$. A kérdés tehát az, hogy ennek a lineáris kongruenciának hány megoldása van 1 és 1000 között. (3 pont)
A kongruenciát 6-tal szorozva $222n \equiv 60 \pmod{218}$, vagyis $4n \equiv 60 \pmod{218}$. (1 pont)
Ezt 4-gyel osztva $n \equiv 15 \pmod{109}$, hiszen 218 és 4 legnagyobb közös osztója 2, amivel a modulust el kell osztani. (1 pont)
Modulo 218 tehát két megoldást kapunk, melyek 15 és $15 + 109 = 124$. (1 pont)
Mivel a 6-tal való szorzás nem ekvivalens átalakítás, az eredményeket vissza kell helyettesíteni az eredeti kongruenciába, hogy kiszűrjük a hamis gyököt: $37 \cdot 15 = 555$, ami nem kongruens 10-zel modulo 218, $37 \cdot 124 = 37 \cdot 4 \cdot 31 = 148 \cdot 31$, ami $-70 \cdot 31$-gyel, azaz -2170-nel kongruens modulo 218, erről pedig (2180-at hozzáadva) látható, hogy csakugyan kongruens 10-zel modulo 218, a megoldás tehát a 124 (mod 218). A két ellenőrzés közül az egyik kiváltható azzal a megállapítással, hogy mivel 37 és 218 relatív prímek, a kongruenciának pontosan egy megoldása lesz modulo 218. (2 pont)
Az n számnak tehát $218k + 124$ alakúnak kell lennie, ahol k egész. (1 pont)
Ahhoz, hogy n 1 és 1000 között legyen, k-nak 0 és $\frac{1000-124}{218}$ közé kell esnie, azaz 5 ilyen egész n lesz. (1 pont)

6. Értelmezzük a síkvektorok $\mathbb{R}^2$ halmazán a $*$ és a $\diamond$ műveleteket a következőképpen:

$$(a, b) * (c, d) = (a + d, bc) \qquad\qquad (a, b) \diamond (c, d) = (a + c, bd)$$

a) Döntsük el, hogy $\mathbb{R}^2$ csoportot alkot-e $*$-ra nézve!
b) Döntsük el, hogy $\mathbb{R}^2$ csoportot alkot-e $\diamond$-ra nézve!

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Vizsgáljuk először $*$ asszociativitását. $((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a + d, bc) * (e, f) = (a + d + f, bce)$, míg $(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (c + f, de) = (a + de, bc + bf)$. (1 pont)
Mivel a két kapott eredmény nem feltétlenül egyenlő (pl. $a = 0, d = 0, f = 1$ esetén), a művelet nem asszociatív, (1 pont)
így a kérdéses struktúra nem csoport. (1 pont)
A b) feladatbeli struktúrának a $(0, 1)$ vektor egységeleme lesz, hiszen $(0, 1) \diamond (a, b) = (a, b)$ (2 pont)
és könnyen látható, hogy a $\diamond$ művelet kommutatív (e megállapítás helyett természetesen lehet a másik irányból is megvizsgálni a feltétel teljesülését). (1 pont)
Mivel $(0, 0) \diamond (a, b) = (a, 0)$, (1 pont)
a (0,0) elemnek nincs inverze, (2 pont)
a kérdéses struktúra tehát nem csoport. (1 pont)
Az utolsó 1 pontok annak járnak, aki a korábbi számolásaiból helyes következtetést von le. Az a) feladatban természetesen annak is járnak a megfelelő pontok, aki másképp mutatja meg, hogy a struktúra nem csoport, pl. mert nem létezik egységelem. A b) feladatban nem szükséges az asszociativitást vizsgálni, hiszen anélkül is látható, hogy nem csoportról van szó. Ha valaki ezt mégis megteszi, akkor kaphat 2 pontot a (helyes) vizsgálatért, azzal a megkötéssel, hogy ha nem mutatta meg, hogy nem létezik minden elemnek inverze, akkor (a b) feladatra) legfeljebb 4 pontot kaphat. Nem kell pontot levonni attól, aki nem ellenőrzi, hogy az egységelem csakugyan a halmazban van-e, mivel ez esetünkben magától értetődő. Végül megjegyezzük, hogy $*$ és $\diamond$ csakugyan művelet $\mathbb{R}^2$-en, ennek ellenőrzéséért azonban nem jár külön pont (hiszen ezt a feladat szövege is kimondja).