Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2025. május 12.

Általános alapelvek.

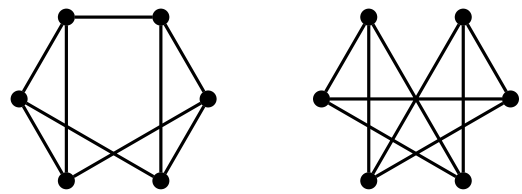
A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, gondolatért, amely egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

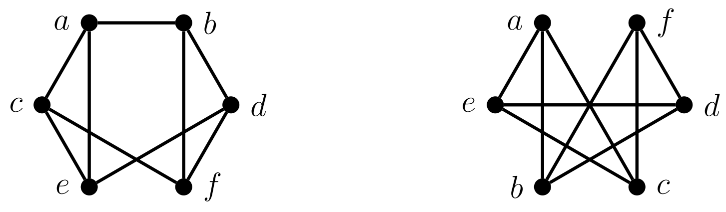
Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, de bizonyítás nélkül csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Döntsük el, hogy a jobbra látható két gráf izomorf-e egymással.



* * * * *

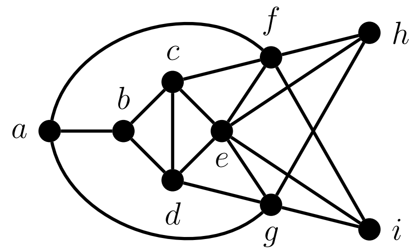
A két gráf izomorf, (0 pont)
amit például a csúcsoknak az alábbi ábrán látható betűzésével lehet igazolni. (5 pont)
Ehhez azt kell ellenőrizni, hogy a bal oldali gráf bármely két csúcsa pontosan akkor szomszédos, ha a jobb oldali gráf azonosan betűzött két csúcsa szomszédos. (2 pont)
Az a csúcs szomszédai mindkét gráfban b, c és e. A b csúcs szomszédai mindkét gráfban a, d és f. És így tovább a többi csúcsra is. (3 pont)



Ha egy megoldónak nem sikerült ugyan megtalálni egy izomorfizmust a két gráf között, de a megoldásból egyértelmű, hogy pontosan tudta, mit keres, akkor a magyarázatért járó utolsó 2+3 pontból 2 megkaphat. Természetesen mindez csak arra az esetre vonatkozik, ha a definíció helyes alkalmazására irányuló szándék a dolgozatból nyilvánvaló, többféleképpen értelmezhető vagy nem világos céllal készült ábrákért nem adunk pontot.

2. a) Létezik-e a jobbra látható gráfban Hamilton-kör?

b) Létezik-e a jobbra látható gráfban olyan Hamilton-kör, ami nem tartalmazza a $\{c, d\}$ élt?



$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

a) A gráfnak van Hamilton-köre; például az $a, b, c, d, g, i, e, h, f, a$ sorrendben bejárva a pontokat Hamilton-kört kapunk. (3 pont)
Pusztán annak közlése, hogy van Hamilton-kör, nem ér pontot.

b) Az a kérdés, hogy a $\{c, d\}$ él elhagyásával kapott gráfban van-e Hamilton-kör. (1 pont)
Ebből a gráfból a b, f, e, g csúcsokat elhagyva a keletkező gráfnak 5 komponense lesz, (4 pont)
amiből az előadáson tanult tétel szerint következik, hogy nincs Hamilton-köre. (2 pont)

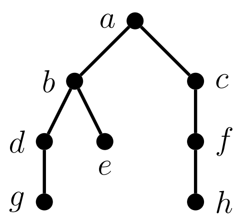
Ha a b) részben egy megoldó helyesen kimondja a vonatkozó tételt és a megoldásából világos, hogy megkísérelte alkalmazni is, de nem talált alkalmas elhagyandó ponthalmazt, vagy egy rossz ponthalmazra akarja alkalmazni a tételt, de világosan kiderül, hogy azt hiszi, hogy ez megtehető, annak 2 pont adható a vonatkozó 4+2-ből. Nem jár pont azonban az olyan megoldási kísérletekért, amikben a megoldó (rajzban és/vagy szövegben) dokumentálja azt a folyamatot, ahogyan sikertelenül próbál rajzolni egy megfelelő Hamilton-kört – kivéve azt az esetet, ha a megoldásból kirajzolódik egy világos terv az összes szóba jövő eset lefedésére és ezeknek legalább a jelentős részét a megoldás meggyőzően ki is zárja.

3. A G irányítatlan, egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. A gráfra lefuttattuk a BFS algoritmust az a csúcsból indítva, melynek során a csúcsokat az *ábécé szerinti sorrendjükben* értük el, és az egyes csúcsok előző(v) mutatóira az alábbiakat kaptuk. Legfeljebb mekkora lehet az e, illetve a h csúcs fokszáma G-ben?

v	:	a	b	c	d	e	f	g	h
előző(v)	:	$*$	a	a	b	b	c	d	f

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

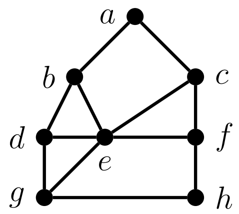
Ekkor az előző(v) értékek alapján a BFS-fa a következőképpen néz ki.



(1 pont)

(A feladat hiánytalan megoldásához persze nem szükséges a BFS-fa felrajzolása.)
Az e csúcs nem lehet szomszédos az a-val, ellenkező esetben az e-t már az a-ból bejártuk volna. (2 pont)
Hasonlóan, a h csúcs nem lehet szomszédos az a, b, c, d, e csúcsok egyikével sem, ellenkező esetben a h-t már bejártuk volna korábban (egész pontosan az első olyan csúcsból az a, b, c, d, e csúcsok közül, amelyikkel h szomszédos). (2 pont)
Vagyis az e csúcs legfeljebb a b, c, d, f, g csúcsokkal lehet szomszédos G-ben, azaz e fokszáma nem lehet 5-nél több, (1 pont)
a h csúcs pedig legfeljebb az f és g csúcsokkal lehet szomszédos, azaz h fokszáma nem lehet 2-nél több. (1 pont)
Az pedig elő is fordulhat, hogy az e fokszáma 5 és a h fokszáma 2, például abban az esetben, ha G az

alábbi gráf (hiszen ebben a gráfban a BFS éppen úgy fut le, ahogy a feladat megadta). (3 pont)
Tehát az e csúcs fokszáma legfeljebb 5, a h csúcsé pedig legfeljebb 2. (0 pont)



4. Egy $G = (A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \le i \le 8$ és $1 \le j \le 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Határozzuk meg $\nu(G)$, azaz a független élek maximális számának, valamint $\rho(G)$, azaz a lefogó élek minimális számának értékét, továbbá adjunk meg G-ben egy maximális független élhalmazt és egy minimális lefogó élhalmazt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Az $\{a_1, b_3\}, \{a_2, b_4\}, \{a_3, b_1\}, \{a_4, b_7\}, \{a_6, b_2\}, \{a_8, b_9\}$ élhalmaz egy 6 elemű független élhalmaz, hiszen semelyik két élnek nincs közös végpontja (az utóbbi megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot), (1 pont)
tehát $\nu(G) \ge 6$. (1 pont)
Az $a_3, a_6, a_8, b_3, b_4, b_7$ csúcsok egy 6 elemű lefogó ponthalmaz, (1 pont)
mert a mátrixban szereplő összes 1-es az érintett sorok vagy oszlopok valamelyikében található (vagyis minden élnek legalább az egyik végpontja a felsoroltak között van). (1 pont)
Tehát $\tau(G) \le 6$. (1 pont)
Innen a $\nu(G) \le \tau(G)$ összefüggés szerint $\nu(G) = \tau(G) = 6$ adódik és így a megadott független élhalmaz maximális (a megadott lefogó ponthalmaz pedig minimális). (2 pont)
A tanultak szerint ekkor a megadott maximális párosítás kiegészíthető egy minimális lefogó élhalmazzá úgy, hogy minden, a párosítás által le nem fogott v csúcs esetén választunk egy tetszőleges v-re illeszkedő élt, vagyis az $\{a_1, b_3\}, \{a_2, b_4\}, \{a_3, b_1\}, \{a_4, b_7\}, \{a_6, b_2\}, \{a_8, b_9\}, \{a_5, b_3\}, \{a_7, b_3\}, \{a_3, b_5\}, \{a_3, b_6\}, \{a_6, b_8\}$ egy minimális lefogó élhalmaz. (3 pont)

Aki csak a minimális lefogó élhalmaz méretét határozza meg (pl. Gallai tétele segítségével), az az utolsó 3 pontból 1-et kapjon, csakúgy, mint az, aki megtalálja ugyan a minimális lefogó élhalmazt, de a minimalitást nem indokolja. A $\nu(G) \le \tau(G)$ állítás helyett lehet (bár szükségtelen) Kőnig tételére is hivatkozni (miszerint páros gráfban $\nu(G) = \tau(G)$). A $\nu(G) = 6$ állítás indoklásáért járó összesen 5 pont viszont csak annak jár, aki meggyőzően és világosan indokolja, hogy a megadott párosítás maximális. (Üres frázisok, mint például „Kőnig tétele miatt" nem érnek pontot.) Megjegyezzük, hogy a maximális párosítást természetesen lehet az előadáson tanult javítóutas algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges ennek a lépéseit dokumentálni. A párosítás maximalitásának az indoklását viszont alapozhatjuk az algoritmusra is: ha (meggyőzően) megmutatjuk, hogy az adott párosításra nézve nincs javítóút, akkor a tanultak szerint az maximális.

5. Egy G egyszerű gráfban egy csúcs fokszáma 1, az összes többi csúcs fokszáma pedig 2025. Határozzuk meg G élkromatikus számát.

* * * * *

Mivel a gráf egyszerű, használhatjuk Vizing tételét: $\chi_e(G) \le \Delta(G) + 1$, így az élkromatikus szám legfeljebb 2026. (2 pont)
Aki nem említi az egyszerűséget, az ezért 1 pontot veszítsen.
Hagyjuk el az elsőfokú csúcsot, és legyen n az így kapott gráf csúcsainak száma. (1 pont)
Ekkor egy csúcs fokszáma 2024 lesz, az összes többié pedig 2025 marad, (0 pont)

így mivel a fokszámösszeg egyenlő a gráf élszámának kétszeresével, azaz páros kell hogy legyen, ezért n páratlan. (1 pont)
Bármely élszínezésben az azonos színű élek párosítást alkotnak, (1 pont)
így legfeljebb $(n-1)/2$ élből állhatnak. (1 pont)
2025 színnel tehát legfeljebb $\frac{2025(n-1)}{2} = \frac{2025n-2025}{2}$ élet tudunk jól kiszínezni, (1 pont)
a gráfnak viszont $\frac{2025(n-1)+2024}{2} = \frac{2025n-1}{2}$ éle van. (1 pont)
Így legalább 2026 színre van szükség a gráf élszínezéséhez, (1 pont)
a keresett élkromatikus szám tehát 2026. (1 pont)

A $\chi_e(G) \geq 2025$ állításért nem jár pont. Aki viszont a 2026 színnel színezhetőség megállapítása után erőfeszítéseket tesz annak belátására, hogy 2026 szín kell is, az kaphat 1 pontot akkor is, ha ezek az erőfeszítések nem járnak sikerrel.
Az annak indoklásáért járó 1 pont, hogy az eredeti gráfnak páros sok csúcsa van (azaz, hogy $n+1$ páros), megszerezhető a következőképpen is. Feltehető, hogy az 1 fokú csúcsra illeszkedő él színe piros. Mivel az azonos végpontú élek mind különböző színűek, ezért a piros élek egy párosítást alkotnak, és mivel csak 2025 színt használtunk, ezért minden 2025 fokú csúcsra is illeszkedik piros színű él. Tehát a piros élek egy teljes párosítást alkotnak, és így a gráfnak páros sok csúcsa van.
Innentől az ellentmondás eléréséig járó 4 pont megszerezhető a következőképpen is. Legyen egy másik szín a kék (0 pont). A kék élek által alkotott párosítás lefedi az összes 2025 fokú csúcsot (az 1 fokú csúcsot viszont nem), és így páros sok 2025 fokú csúcsa van a gráfnak (2 pont), vagyis a gráfnak összesen páratlan sok csúcsa van, ami ellentmondás (2 pont).

6*. Az n csúcsú $G = (A, B; E)$ páros gráfban minden A-beli csúcs fokszáma 5 és minden B-beli csúcs fokszáma 4. Határozzuk meg a G-beli független élek maximális számát, azaz $\nu(G)$ értékét. (A válasz természetesen n értékétől függhet.)

* * * * *

Első megoldás. Mivel a gráf páros, ezért az A-beli csúcsok fokszámösszege, illetve a B-beli csúcsok fokszámösszege is a gráf élszámával egyenlő, (1 pont)
így $5|A| = 4|B|$, amiből $|B| = n - |A|$ felhasználásával $|A| = \frac{4}{9}n$ adódik. (1 pont)
Hall tételének segítségével belátjuk, hogy G-ben van A-t fedő párosítás. (0 pont)
Legyen $X \subseteq A$ tetszőleges. Ha $X = \emptyset$, akkor $N(X) = \emptyset$, vagyis ekkor $|X| \leq |N(X)|$. (0 pont)
Ha $X \neq \emptyset$, akkor jelölje m_X az X és $N(X)$ között menő élek számát. (0 pont)
Mivel az X-re illeszkedő összes él $N(X)$-be megy, ezért $m_X = 5|X|$. (2 pont)
Az $N(X)$-re illeszkedő $4|N(X)|$ darab él között minden X és $N(X)$ közötti él ott van (és mellettük mások is lehetnek), így $m_X \leq 4|N(X)|$. (2 pont)
Tehát $5|X| \leq 4|N(X)|$, azaz $|X| \leq \frac{4}{5}|N(X)| \leq |N(X)|$. (2 pont)
Így Hall tétele miatt létezik A-t fedő párosítás, (1 pont)
ami nyilván maximális, és így $\nu(G) = |A| = \frac{4}{9}n$. (1 pont)

Második megoldás. Mivel a gráf páros, ezért az A-beli csúcsok fokszámösszege, illetve a B-beli csúcsok fokszámösszege is a gráf élszámával egyenlő, (1 pont)
így $5|A| = 4|B|$, amiből $|B| = n - |A|$ felhasználásával $|A| = \frac{4}{9}n$ adódik. (1 pont)
Vagyis a gráfnak $5|A| = \frac{20}{9}n$ éle van. (1 pont)
Mivel minden csúcs legfeljebb 5 élt fog le, (1 pont)
ezért az összes él lefogásához legalább $\left(\frac{20}{9}n\right)/5 = \frac{4}{9}n$ csúcsra van szükség, (1 pont)
és így $\tau(G) \geq \frac{4}{9}n$. (1 pont)
Mivel az A-beli csúcsok egy lefogó ponthalmazt alkotnak, ezért $\tau(G) \leq |A| = \frac{4}{9}n$. (1 pont)
Így $\tau(G) = \frac{4}{9}n$. (1 pont)
Mivel a gráf páros, ezért Kőnig tétele miatt $\nu(G) = \tau(G) = \frac{4}{9}n$. (2 pont)