Bevezetés a számításelméletbe II.
Díjköteles pótlás feladatok — pontozási útmutató
2022. június 1.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. A zárthelyiben egyes feladatoknak több (lényegesen nem eltérő) verziója is megjelent. Az útmutató minden feladat egy verziójához leírja (legalább) egy megoldásának főbb gondolatait és közli az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, ami egy megoldásban érdemi szerephez juthat és amiből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legföljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér, bizonyítás nélkül azonban csak az előadáson szereplő tételekre és állításokra lehet hivatkozni.

1. Piréziában lecserélték a rendszámokat, mindegyik 8 karakterből áll és a karakterek mindegyike az angol ábécé 26 betűjének vagy a 10 számjegynek az egyike. Ezen kívül csak egyetlen szabály vonatkozik a rendszámokra: mindegyik pontosan 3 számjegyet tartalmaz. Hány rendszám készíthető most Piréziában? (A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami csak a négy alapműveletet ismeri.)

* * * * *

Először válasszuk ki a 8 karakter közül azt a 3-at, ahová a számjegyek kerülnek. A lehetőségek száma (az ismétlés nélküli kombinációnál tanultak szerint) $\binom{8}{3} =$ (1 pont)
$= \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 56.$ (2 pont)
Ezután a kijelölt három helyen a számjegyeket 10^3-féleképp tölthetjük ki, (1 pont)
mert az első 10-féle lehet, mind a 10 kezdést 10-féleképp folytathatjuk, az így kapott 10^2-féle esetet pedig 10-féleképp fejezhetjük be (vagy az ismétléses variációnál tanultakra hivatkozással). (1 pont)
Hasonlóan, az öt megmaradó helyen a betűket 26^5-féleképpen tölthetjük ki. (1 pont)
A rendszámok száma így végül is $56 \cdot 10^3 \cdot 26^5$, (2 pont)
mert a $\binom{8}{3}$ választás mindegyikéhez 10^3-féleképp választhatunk számjegyeket és minden így kapott esethez 26^5-féleképp választhatunk betűket. (2 pont)
$\binom{8}{3}$ konkrét értékét a feladat szövege szerint nem kell kiszámolni, a megfelelő részpontszám a kiszámolás módját mutató felírásért jár. Ennek megfelelően a végeredményt is elég ezzel megadni. Bár a feladat szövege a négy alapművelet használatát engedélyezi, ne vonjunk le pontot a hatvány jelölés használatáért.

2. Az $r = 1, 2, \ldots, 8$ értékek közül melyikre/melyekre igaz, hogy minden 16 csúcsú, r-reguláris, egyszerű páros gráfban van Euler-körséta? (Egy gráf r-reguláris, ha minden csúcsának foka r.)

* * * * *

A tanultak szerint olyan gráfban, melyben van páratlan fokú csúcs, nem lehet Euler-körséta, így az $r = 1, 3, 5, 7$ értékek nem megfelelők. (1 pont)
Az $r = 2$ és $r = 4$ értékekre sem igaz az állítás, mert létezik olyan 16 csúcsú, 2-reguláris, illetve 4-reguláris egyszerű, páros gráf, melynek egynél több (élt tartalmazó) komponense van, így nincs benne Euler-körséta. (1 pont)
(Ne vonjunk le pontot azért, ha a megoldás nem tér ki arra, hogy a komponensek tartalmaznak élt.)
Az előbbire példa (mások mellett) két 8 csúcsú kör uniójaként kapott gráf, (1 pont)
az utóbbira pedig két $K_{4,4}$ teljes páros gráf uniójaként előálló gráf. (A $K_{4,4}$ gráf mindkét pontosztályában 4 csúcs van és minden olyan csúcspár szomszédos, aminek a tagjai különböző pontosztályba tartoznak.) (2 pont)
Az $r = 6$ és $r = 8$ esetekben viszont a gráf összefüggő kell legyen. Valóban, ha a két pontosztályt A és B jelöli és $a \in A$ tetszőleges csúcs, akkor a-val egy komponensbe kell tartozzon annak a legalább 6 B-beli szomszédja, valamint ezek közül egy tetszőlegesnek az a-tól különböző, legalább 5 A-beli szomszédja is. Így minden komponens legalább 12 csúcsú, vagyis a 16 csúcsú G gráfnak csak egy komponense lehet. (3 pont)
Mivel az olyan összefüggő gráfoknak pedig, melyeknek nincs páratlan fokú csúcsa, a tanultak szerint van Euler-körsétája, ezért az $r = 6$ és $r = 8$ esetekben az állítás igaz. (2 pont)
Az $r = 8$ esetben a gráf összefüggőségét rövidebben, például a Dirac-tételre hivatkozással is lehet indokolni. Ha egy megoldó csak az $r = 8$ esetre mutatja meg az összefüggőséget, akkor a megfelelő 3 pontból 1-et kapjon meg.

3. Egy 9 csúcsú egyszerű gráfnak 21 éle van. Mutassuk meg, hogy a gráfban van páratlan kör.

* * * * *

Jelölje a gráfot G és tegyük fel, hogy G-ben nincs páratlan kör. (0 pont)
Ekkor a tanultak szerint G páros gráf kell legyen. (3 pont)
Ha G kisebbik pontosztályában x csúcs van, a nagyobbikban pedig $9 - x$, akkor az éleinek a száma legföljebb $x \cdot (9 - x)$ (3 pont)
(mert a gráf egyszerű). (0 pont)
A szóba jövő $x = 0, 1, 2, 3, 4$ értékekre tehát G élszáma legföljebb 0, 8, 14, 18, illetve 20. (1 pont)
G-nek tehát mindenképp legföljebb 20 éle van, ami kevesebb a feladatban szereplő 21 élnél. Így G-nek csakugyan kell legyen páratlan köre. (3 pont)

4. A $G = (A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 8$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg egy maximális párosítást és egy maximális független ponthalmazt G-ben.

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&1&0&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Például $M = \Big\{\{a_1, b_6\}, \{a_2, b_5\}, \{a_3, b_9\}, \{a_4, b_2\}, \{a_5, b_3\}, \{a_7, b_4\}\Big\}$ 6 élű párosítás G-ben (hiszen az élei közül semelyik kettőnek nincs közös végpontja). (1 pont)
Az $X = \{a_2, a_5, a_7, b_2, b_6, b_9\}$ halmaz lefogó ponthalmaz G-ben (ez a feladatban megadott mátrixból könnyen ellenőrizhető: a megfelelő sorok és oszlopok együtt minden 1-est tartalmaznak). (3 pont)
M létezése bizonyítja a $\nu(G) \geq 6$ állítást, X létezése pedig a $\tau(G) \leq 6$ állítást. (1+1 pont)
Így a tanult $\nu(G) \leq \tau(G)$ állítás miatt G-re $6 \leq \nu(G) \leq \tau(G) \leq 6$. Ebből $\nu(G) = 6$, vagyis a megadott M párosítás maximális. (1 pont)
Ugyanebből $\tau(G) = 6$ is adódik, így $\alpha(G) = |V(G)| - \tau(G) = 17 - 6 = 11$ a tanult (Gallairól elnevezett) tétel szerint. (1 pont)
11 csúcsú független ponthalmazt alkotnak az (X lefogó ponthalmazba nem tartozó) $\{a_1, a_3, a_4, a_6, a_7, b_1, b_3, b_4, b_5, b_7, b_8\}$ csúcsok, mert ezek közül semelyik kettő nem szomszédos. Így ez maximális független ponthalmaz G-ben. (2 pont)
A $\nu(G) \leq \tau(G)$ állítás helyett lehet (bár szükségtelen) Kőnig tételére is hivatkozni, ami szerint páros gráfban $\nu(G) = \tau(G)$. A $\nu(G) = 6$ állítás indoklásáért járó összesen 3 pont viszont csak annak jár, aki meggyőzően és világosan indokolja, hogy a megadott párosítás maximális. (Üres frázisok, mint például „Kőnig tétele miatt” nem érnek pontot.) Megjegyezzük, hogy a maximális párosítást és a minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult javítóutas algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges ennek a lépéseit dokumentálni. Azonban a párosítás maximalitásának és a lefogó ponthalmaz minimalitásának az indoklását is lehet az algoritmusra alapozni: ha (meggyőzően) megmutatjuk, hogy az adott párosításra nézve nincs javítóút, akkor a tanultak szerint az maximális; ha pedig ebben az esetben X az A-beli, a párosítás által lefedetlen csúcsokból alternáló úton elérhető B-beliekből és az alternáló úton el nem érhető A-beliekből áll, akkor az a tanultak szerint minimális méretű lefogó ponthalmaz.

5. Egy 5 csúcsú teljes gráf egy Hamilton-körének az éleit helyettesítsük két-két párhuzamos éllel. Határozzuk meg az így kapott (5 csúcsú és 15 élű) G gráf $\chi_e(G)$ élkromatikus számát.

* * * * *

Először megmutatjuk, hogy G élei megszínezhetők 8 színnel. (0 pont)
Válasszunk először a megduplázott élpárok mindegyikéből egy-egy élt. Ezek együttesen egy 5 hosszú kört alkotnak, így nyilván megszínezhetők 3 színnel. Ha most ezeket az éleket elhagyjuk, akkor egy 5 csúcsú teljes gráfot kapunk. Mivel ebben minden pont foka 4 (és ez már egyszerű gráf), ezért Vizing tétele szerint az élei megszínezhetők további 5 színnel. Így G éleit valóban megszíneztük összesen $5 + 3 = 8$ színnel. (4 pont)
Vegyük most G-nek egy tetszőleges, helyes élszínezését. Ebben minden színt legföljebb két él kaphat meg, mert három, azonosan színezett élnek összesen már 6 végpontja kellene legyen. (2 pont)
Mivel G-nek összesen 15 éle van és minden színt csak kétszer használhatunk, ezért legalább 8 színre van szükség egy helyes élszínezéséhez. (3 pont)
A fentiek szerint tehát $\chi_e(G) = 8$. (1 pont)
A fenti pontozás szerinti első 4 pont természetesen jár azért, ha a megoldó megadja (lerajzolja) G egy helyes élszínezését 8 színnel. Mivel G nem egyszerű gráf, ezért rá a Vizing-tétel nem alkalmazható, így egy 8 színnel való élszínezés létezése ezen a módon nem indokolható, az ilyen próbálkozásokért nem jár pont (de persze ettől függetlenül a 7 színnel való élszínezés lehetetlenségéért járó részpontok megadhatók).

6*. a) Legyen G páros gráf és M egy maximális méretű párosítás G-ben. Igaz-e mindig, hogy M megkapható a páros gráfokban maximális méretű párosítás keresésére szolgáló javítóutas algoritmus egy helyes futásának az eredményeképpen, ha az algoritmust az üres párosítástól indítjuk?

b) Legyen G irányított gráf, $s, t \in V(G)$ különböző csúcsok, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ kapacitásfüggvény, valamint legyen f egy maximális értékű folyam a (G, s, t, c) hálózatban. Igaz-e mindig, hogy f megkapható a maximális folyam keresésére szolgáló javítóutas algoritmus egy helyes futásának az eredményeképpen, ha az algoritmust az azonosan nulla folyamtól indítjuk?

* * * * *

a) Legyen $M = \{e_1, \ldots, e_k\}$. Ekkor e_1 (a végpontjaival) 1 élű javítóutat alkot az üres párosításra nézve és minden $2 \leq i \leq k$ esetén e_i (a végpontjaival) ugyancsak 1 élű javítóutat alkot az $M_i = \{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$ párosításra nézve. (3 pont)
Így sorra ezeket a javítóutakat választva az algoritmus egy helyes futásából M-et kapjuk, vagyis a válasz igen. (1 pont)

b) Itt a válasz már nemleges, ezt egy ellenpéldával mutatjuk meg. (0 pont)
Legyen $V(G) = \{s, t, v\}$ és álljon G élhalmaza az $e_1 = (s, v)$, $e_2 = (v, t)$, $e_3 = (v, t)$ élekből (vagyis e_2 és e_3 párhuzamos élek). Legyen továbbá minden e élre $c(e) = 1$, valamint $f(e_1) = 1$ és $f(e_2) = f(e_3) = \frac{1}{2}$. (2 pont)
Ekkor f valóban folyam (mert megfelel a folyam definíciójának) és az értéke $m_f = 1$. (1 pont)
Ráadásul f nyilván maximális folyam, mert az $X = \{s\}$ vágás kapacitása 1, így G-ben nem létezhet 1-nél nagyobb értékű folyam. (1 pont)
Azonban a javítóutas algoritmus nem adhatja f-et. Valóban, mivel minden él kapacitása egész és az eljárást az azonosan nulla folyamtól indítjuk, ezért a tanultak szerint az olyan folyammal áll meg, amiben minden élen a folyamérték egész. (2 pont)
A b) feladatban természetesen sok más ellenpélda is adható. (A legkisebb ellenpélda az, amire $V(G) = \{s, t\}$ és G-nek egyetlen e éle van, egy s-re vagy t-re illeszkedő hurokél, amire $f(e) = c(e) = 1$. Ez az ellenpélda azonban kicsit „sportszerűtlen", ezért fentebb egy másikat írtunk le.) Létezik olyan ellenpélda is, amiben f megkapható volna az algoritmus futásából, de csak akkor, ha a segédgráfban nem mindig a legrövidebb javítóutak egyikét választanánk; mivel a tanultak szerint az eljárás során mindig egy legrövidebb javítóutat kell választani, ezért az ilyen példák is teljes értékűek és maximális pontot érnek.