# Bevezetés a Számításelméletbe II.

Nyolcadik gyakorlat, 2020. április 7.,8.

**1.** a) 7 lány (A,B, …, G) és 6 fiú (1-től 6-ig) ért házasulandó korba egy indián törzsben. A törzsfőnök felmérte, hogy ki kivel hajlandó frigyre lépni: eredményei a jobb oldali táblázatban láthatók. A törzsfőnök szeretne minden fiúnak feleséget találni (ha már a lányok közül valaki úgyis biztos pártában marad). Lehetséges ez?

b) Sajnos konkoly hullt G és 5 szerető szívének tiszta búzájába: többé már nem hajlandók egymáséi lenni. Oldjuk meg a feladatot erre az esetre is. (ZH, 2011. május 9. nyomán)

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | ♥ | | | | ♥ | |
| 2 | ♥ | ♥ | ♥ | ♥ | ♥ | | ♥ |
| 3 | | ♥ | | | ♥ | ♥ | |
| 4 | ♥ | | ♥ | ♥ | | ♥ | ♥ |
| 5 | | | | | ♥ | ♥ | ♥ |
| 6 | | ♥ | | | ♥ | | |

**2.** Egy kiránduláson $n$ házaspár vesz részt. El kellene osztani közöttük $2n$ különböző fajta csokit úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább $n$ fajtát szeret a csokik közül. Továbbá minden emberre teljesül, hogy ha ő valamelyik fajta csokit nem szereti, akkor a házastársa ezt a fajtát biztosan szeretni fogja. Bizonyítsuk be, hogy a csokik szétoszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret. (Jegyzet, 2.23. Feladat)

---

**3.** Egy $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_9\}$. Minden $1 \leq i \leq 9$ és $1 \leq j \leq 9$ esetén az $a_i$ akkor legyen szomszédos $b_j$-vel, ha a jobbra látható mátrix $i$-edik sorának és $j$-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg $G$-ben egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt. (ZH, 2015. április 23.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**4.** Legyen $G$ egyszerű, összefüggő páros gráf, melynek mindkét pontosztályában $n$ pont van, és az egyik pontosztályban minden pont foka különböző. Mutassuk meg, hogy $G$-ben van teljes párosítás.

**5.** Egy 11 csúcsú fában minden csúcs foka legfeljebb 3. Mutassuk meg, hogy a fában van 4 élű párosítás. (ZH, 2015. április 23.)

**6.** Egy 20 csúcsú $G$ páros gráfban 18 csúcs foka 5, a maradék 2 csúcs foka 3. Határozzuk meg a $\nu(G)$ értéket.

**7.** Egy 100 csúcsú egyszerű, összefüggő gráf tetszőlegesen kiválasztott 3 pontja között fut legalább egy él. Bizonyítsuk be, hogy létezik a gráfban teljes párosítás. Igaz-e az állítás 3 helyett 4 pont esetén?

---

**8.** Egy 100 csúcsú $G$ gráfban van teljes párosítás. Mutassuk meg, hogy $\chi(\overline{G}) \leq 50$. (ZH, 2010. október 18.)

**9.** Egy páros gráf két pontosztálya $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Az $a_i$ és $b_j$ csúcsok közt pontosan akkor van él, ha a jobbra látható mátrix $i$. sorának $j$. eleme 1. Döntsük el, hogy van-e $G$-ben $B$-t fedő párosítás. (ZH, 2014. október 27.)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**10.** Egy táncmulatságon 25 fiú és 25 lány van jelen. Minden lány ismer legalább 13 fiút, és minden fiú ismer legalább 13 lányt. Mutassuk meg, hogy tudnak mindnyájan egyszerre táncolni egy páros táncot úgy, hogy mindenki ismerőssel táncol.

**11.** Egy egyszerű páros gráf mindkét osztályában pontosan 5 csúcs van, minden csúcs foka legalább 2. Igaz-e, hogy a gráfban biztosan van teljes párosítás? (ZH, 2010. május 6.)

**12.** Egy 19 csúcsú páros gráfban 17 csúcs foka 6, a maradék 2 csúcs foka 3. Mutassuk meg, hogy van a gráfnak 9 élű párosítása.

**13.** Valaki találomra szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy 2-es, egy 3-as, stb., egy ász).

**14.** A sakktáblán találomra elhelyezve a 32 sakkfigurát azt vesszük észre, hogy minden sorba és minden oszlopba éppen 4 figura került. Bizonyítsuk be, hogy a figurák közül kiválasztható 8 úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban éppen 1 van a kiválasztottak közül.

**15*.** Egy szigeten $n$ törzs él, földműveléssel és vadászattal foglalkoznak. Belvillongások miatt a Földművelésügyi Minisztérium felosztja a szigetet $n$ egyenlő területű parcellára, hogy minden törzs egyet-egyet kapjon. Ugyanezt teszi a Vadászati Minisztérium is, nem tudva a már létező felosztásról. Bizonyítsuk be, hogy a parcellák kioszthatók úgy, hogy minden törzs földművelési és vadászati parcellájának legyen közös része.