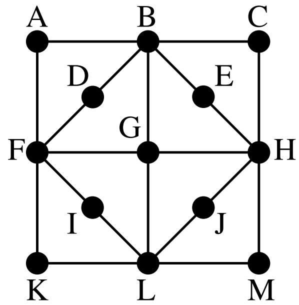
Bevezetés a Számításelméletbe II.

Hetedik gyakorlat, 2021. március 23.



1. Intervallumgráf-e egy öt csúcsú út, egy öt csúcsú kör, illetve egy négy csúcsú kör?

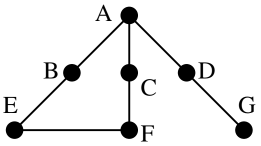
2. a) Adjunk meg a jobbra látható gráfban egy maximális párosítást. (ZH, 2020. június 3.)

b) Határozzuk meg $\alpha(G)$, $\tau(G)$ és $\varrho(G)$ értékét is a jobbra látható gráfra és adjunk meg egy maximális független csúcshalmazt, valamint egy minimális lefogó csúcshalmazt és élhalmazt.

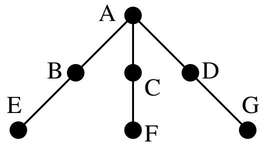
---

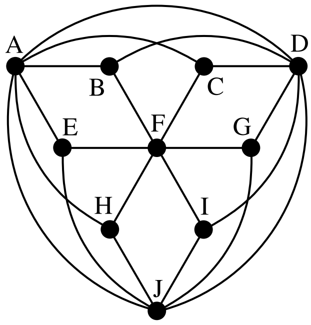
3. Döntsük el, hogy az alábbi gráfok intervallumgráfok-e. (ZH, 2015. április 23.)

a)



b)





4. Határozzuk meg $\nu(G)$, $\alpha(G)$, $\tau(G)$ és $\varrho(G)$ értékét a jobbra látható G gráfra és adjunk meg egy maximális független élhalmazt és csúcshalmazt, valamint egy minimális lefogó csúcshalmazt és élhalmazt. (ZH, 2015. május 4. alapján)

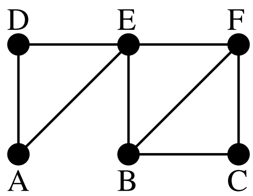
5. A $2n$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább n. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás.

6. a) Legyen M egy maximális párosítás a G egyszerű gráfban és álljon az X csúcshalmaz az M-beli élek végpontjaiból. Bizonyítsuk be, hogy X lefogó ponthalmaz.

b) Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű G gráfban $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ teljesül.

7. Bizonyítsuk be, hogy az n csúcsú, hurokélmentes G gráfban fennállnak az alábbi összefüggések.

a) $\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$ b) $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$



8. Intervallumgráf-e a jobbra látható gráf? (ZH, 2018. május 14.)

9. Legyen G a számegyenes következő zárt intervallumai által meghatározott intervallumgráf: $[1;3]$, $[2;4]$, $[8;11]$, $[5;11]$, $[4;9]$, $[1;6]$, $[2;7]$, $[10;11]$. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát és $\omega(G)$ klikkszámát.

10. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 60\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $x \neq y$ és $x \cdot y$ osztható 6-tal. Határozzuk meg $\nu(G)$, vagyis a G-beli független élek maximális számának értékét. (ZH, 2009. március 23.)

11. A $2k + 1$ pontú, egyszerű G gráfban minden pont foka legalább $k + 1$. Mennyi $\nu(G)$, a független élek maximális számának értéke? (ZH, 2003. május 13.)

12. Egy adott intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha az intervallumrendszerből törlünk néhány olyan intervallumot, melyek közt semelyik háromnak nincs közös pontja, akkor a visszamaradó intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma legalább 8. (ZH, 2014. március 20.)

13. Legyen M egy $n \times n$-es mátrix. Készítsük el M-ből a G páros gráfot a következőképpen: G egyik pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, a másik $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$; továbbá minden $1 \leq i, j \leq n$ esetén a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha az M mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem nem nulla. Mutassuk meg, hogy ha $\det M \neq 0$, akkor G-ben van teljes párosítás.

14. A 101 csúcsú G gráf egy 50 pontú és egy 51 pontú körből készült úgy, hogy az egyik kör minden csúcsát összekötöttük a másik kör minden csúcsával. Határozzuk meg $\alpha(G)$ és $\varrho(G)$ értékét.

15. Igaz-e, hogy minden G egyszerű gráfnak van olyan színezése $\chi(G)$ színnel, melyben (legalább) az egyik színosztály $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?