Bevezetés a Számításelméletbe II.

Hatodik gyakorlat, 2020. március 24.,25.

Gráfok színezése

Megoldások

1. Könnyű a gráfot két színnel színezni (pl. a BFS használatával), tehát páros gráf lesz. Ld. még a jegyzet 1.4. Feladatát.

2. Jegyzet 1.9. Feladat.

3. Jegyzet 1.13. Feladat.

4. Az a) páros gráf (könnyű megszínezni két színnel a kör mentén felváltva haladva), a b) nem, mert van benne páratlan (5 hosszú) kör.

5. A kromatikus szám 4, a klikkszám 3. Jó színezést kapunk 4 színnel, ha a szemközti csúcsokat azonosra festjük. Azt, hogy három szín nem elég, könnyű belátni. Legyenek ehhez a nyolcszög csúcsai sorban a, b, c, d, e, f, g, h. Ekkor ha csak 3 színünk van, a, b, c különböző színeket kell kapjon (mondjuk $a : 1, b : 2, c : 3$). Ekkor d 1-es színű kell legyen, hiszen van 2-es és 3-as színű szomszédja is, hasonlóképp e 2-es, f 3-as kell legyen, g-nek pedig már nem találunk jó színt, hiszen 1-es, 2-es és 3-as színű szomszédja is van.
Ez utóbbi érvelés helyett megfigyelhetjük, hogy bármely színezésben bármely szín legfeljebb kétszer fordulhat elő (miért?), így a nyolc csúcshoz nem elég három szín. Hármas klikket könnyű találni, nagyobb viszont nincs, mert olyan csúcsok, amiknek a távolsága a nyolcszögön nagyobb, mint kettő, nincsenek összekötve. Lásd még a jegyzet 1.9. Feladatát.

6. A kromatikus szám 8. Bármely sor vagy oszlop 8-as klikket alkot, így ennyi színre biztosan szükség van. Jó színezést kapunk, ha az első sor mezőit rendre az 1,2,3,4,5,6,7,8 színekkel színezzük, a második sor mezőit rendre a 2,3,4,5,6,7,8,1 színekkel, s.í.t. az utolsó sorig, ahol a mezők színe rendre 8,1,2,3,4,5,6,7. Az eddigiek szerint $8 \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq 8$, vagyis $\chi(G) = 8$.

7. A kromatikus szám 11. Ekkora klikket alkotnak a $\{10, 11, \ldots, 19, 20\}$ számok, őket színezzük különböző színekkel. Könnyen ellenőrizhető, hogy a 10-nél kisebb számoknak is a 10 színét, a 20-nál nagyobb számoknak pedig a 20 színét adva jó színezést kapunk 11 színnel. Mindezekből $11 \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq 11$, vagyis $\chi(G) = 11$. Ugyanennyi színt használó színezést kapunk akkor is, ha a számokat nagyság szerint növekvő vagy csökkenő sorrendben színezzük mohón.

8. Legyenek a huszárok egy gráf csúcsai, él akkor legyen két huszár között, ha ütni tudják egymást. A kapott gráf páros, mivel fehér mezőn álló huszár csak fekete mezőn álló huszárt tud ütni és viszont. Legyen a páros gráf egyik (mondjuk A) osztályában a csúcsok száma k, ekkor a másik (mondjuk B) osztályban $7 - k$ csúcs lesz. Ha minden huszár pontosan két másikat tudna ütni, akkor az A osztályból kimenő élek száma $2k$, a B osztályból kimenő élek száma $2(7 - k)$ lenne. Mivel mindkét szám a gráf éleinek száma (hiszen minden élnek pontosan az egyik végpontja van A-ban, illetve B-ben is), egyenlőknek kéne lenniük, ahonnan $k = \frac{7}{2}$ következne, ami lehetetlen.
Alternatív megoldásként beláthatjuk, hogy egy 2-reguláris gráf (vagyis olyan gráf, ahol minden fok 2) körök uniója kell legyen, ami esetünkben maga után vonná, hogy a gráfban van páratlan kör (hiszen a körök hosszainak összege a gráf csúcsszáma, vagyis 7), ez pedig ellentmondás.

9. Színezzük a csúcsokat mohón úgy, hogy először azokra a csúcsokra kerítünk sort, melyek fokairól nem tudunk semmit. Ezekből 100 darab van, így erre legfeljebb 100 színt fogunk használni. A maradék csúcsok színezésekor sem lesz szükség soha 100-nál nagyobb sorszámú színre, hiszen minden ilyen csúcsnak legfeljebb 99 a foka, tehát a már színezett szomszédainak száma sem lehet 99-nél nagyobb.

10. A gráfban kell legyen páratlan kör (nevezzük C-nek), ellenkező esetben páros gráf volna, így nem lehetne a kromatikus száma 3. Könnyen látható, hogy C minden csúcsot tartalmaz, különben bármely rajta kívül eső csúcsot elhagyva még mindig lenne páratlan kör, vagyis a kromatikus szám nem csökkenne 2-re. Megmutatjuk még, hogy a gráfnak C élein kívül más éle nem is lehet. Bármely egyéb e él ugyanis két kisebb körre osztaná C-t, mégpedig úgy, hogy a két körnek egy közös éle lenne, éspedig e, C élei pedig a két kör közül pontosan az egyikben szerepelnének. Így a két kör hosszainak összege kettővel lenne nagyobb C hosszánál, vagyis a kettő közül pontosan az egyik páratlan hosszú lenne. Ekkor a páros hosszú kör egy, a páratlan hosszúban nem megjelenő csúcsát elhagyva a gráfból, a kromatikus szám nem csökkenne 2-re, ami ellentmondás. Összefoglalva: a gráfnak van egy páratlan köre, mely minden csúcson átmegy és a gráfnak más éle nincs, így a gráf egy páratlan kör kell legyen, ezek pedig csakugyan teljesítik is a feladatbeli feltételt.