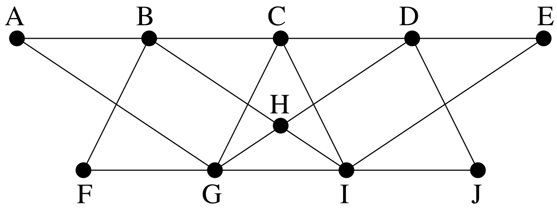
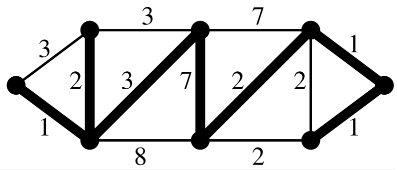
1. Bejárhatja-e a BFS algoritmus a jobbra látható gráf csúcsait az alábbi sorrendben? Ahol a válasz igen, ott adjuk meg az algoritmus futása során keletkező összes adatot (vagyis minden v csúcsra táv(v) és előző(v) értékét, valamint a bejáráshoz tartozó BFS-fát).

a) H, B, D, G, I, C, A, F, J, E
b) F, B, A, G, C, H, I, D, E, J



2. a) Határozzunk meg egy minimális összsúlyú feszítőfát a jobbra látható élsúlyozott gráfban.

b) Minimális összsúlyú feszítőfát alkotnak-e a megvastagított élek a jobbra látható élsúlyozott gráfban? (ZH, 2024. június 5.)



---

3. Oldjuk meg az **1.** feladatot a csúcsok alábbi sorrendjeire is.

a) J, D, I, C, E, G, H, A, F, B
b) A, B, G, C, H, F, I, D, E, J

4. A tíz csúcsú G teljes gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Minden $1 \le i < j \le 10$ esetén az $\{i, j\}$ él súlya az i és j értékek közül a nagyobb. Adjunk meg G-ben egy minimális összsúlyú feszítőfát.

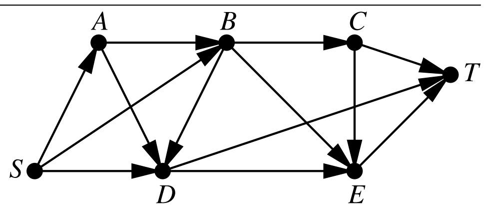
5. a) Olyan algoritmust kell terveznünk, amely egy adott G gráf és annak egy e éle esetén eldönti, hogy G-ben van-e e-t tartalmazó kör és ha igen, akkor megtalálja az ilyen körök közül a legrövidebbek egyikét. Hogyan lehetne a BFS algoritmust ennek a feladatnak a hatékony megoldására felhasználni?

b) Mi a helyzet akkor, ha adott él helyett egy adott csúcsot tartalmazó legrövidebb kört kell találnunk?

6. Egy élsúlyozott, összefüggő G gráfban minden él súlya legföljebb 100. Tudjuk, hogy G-ben van olyan minimális összsúlyú feszítőfa, ami tartalmaz 100 súlyú élt. Mutassuk meg, hogy ekkor G minden (nem feltétlen minimális összsúlyú) feszítőfája is tartalmaz 100 súlyú élt.

---

7. a) A BFS algoritmus (irányított gráfokra vonatkozó változata) a jobbra látható ábra gráfjának csúcsait a következő sorrendben járta be: S, □, □, A, T, □, □. Egészítsük ki a sorozatot a hiányzó csúcsok neveivel (ezeket □ jelöli) és adjuk meg a bejáráshoz tartozó BFS-fát. (ZH, 2022. május 5.)



b) Futtassuk most a BFS algoritmust ugyanennek a gráfnak az irányítatlan változatában S-ből indítva. Előfordulhat-e, hogy a bejáráshoz tartozó BFS-fa tartalmazza a {C, T} élt?

8. A tíz csúcsú G teljes gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Minden $1 \le i < j \le 10$ esetén az $\{i, j\}$ él súlya legyen $\left\lfloor \frac{2j-i}{3} \right\rfloor$ (ahol a $\lfloor\ \rfloor$ alsó egészrészt jelöl). Adjunk meg G-ben egy minimális összsúlyú feszítőfát. (ZH, 2021. május 18.)

9. A G irányítatlan, egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. G-re lefuttattuk a BFS algoritmust az a csúcsból indítva és az egyes csúcsok előző(v) mutatóira a jobbra látható értékeket kaptuk.

v	:	a	b	c	d	e	f	g
előző(v)	:	$*$	a	a	b	c	c	f

a) Mennyi táv(g), vagyis a g csúcs távolsága a-tól?

b) Mennyi az a csúcs foka G-ben?

c) Mennyi a g csúcs foka G-ben, ha azt is tudjuk, hogy a BFS algoritmus a csúcsokat ábécé szerinti növekvő sorrendben járta be (vagyis a csúcsok ebben a sorrendben váltak aktív csúccsá)? (ZH, 2024. május 9.)

10. A G összefüggő gráfban minden pont foka 3. Az s csúcsából indított BFS algoritmus a v csúcsot tizenharmadikként éri el (az elsőként elért csúcsnak s-et tekintjük). Előfordulhat-e, hogy v távolsága s-től

a) 2;
b) 3;
c) 8?

11. a) Legyen G összefüggő, egyszerű gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Tegyük fel, hogy G-ben az e él egyik végpontja v és a v-re illeszkedő minden f élre $w(e) \le w(f)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami tartalmazza e-t. (ZH, 2015. március 19.)

b) Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Legyen továbbá C egy kör G-ben és e a C egy éle. Tegyük fel, hogy a C kör minden f élére $w(f) \le w(e)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan minimális összsúlyú feszítőfája, ami nem tartalmazza e-t. (ZH, 2015. május 4.)

12*. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Mutassuk meg, hogy G minden (w-re nézve) minimális összsúlyú feszítőfája megkapható, mint a Kruskal-algoritmus egyik lehetséges futásának az eredménye.